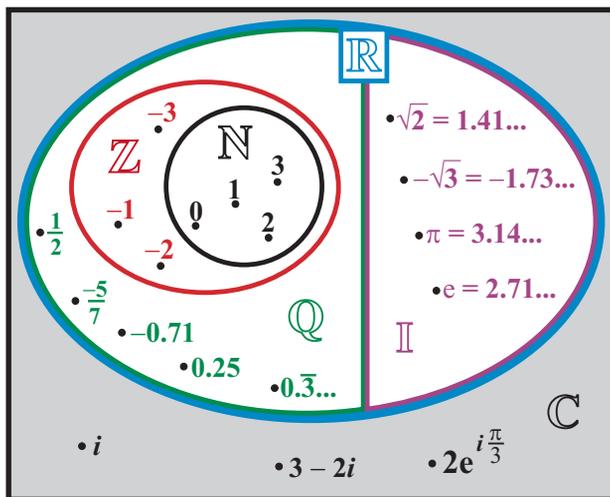


Formelsammlung in Mathematik

1. Zahlenmengen	Natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen	2
2. Algebra	Rechengesetze, Äquivalenzumformungen	3
	Binomische Formeln, Binomischer Satz, Bruchrechnen	4
	Potenzen, Logarithmen	5
3. Planimetrie	Allgemeine und rechtwinklige Dreiecke	6
	Gleichschenklige und gleichseitige Δ , Linien im Δ	7
	Vierecke	8
	Kreisteile, Kreisgleichungen, Kreiswinkelsätze	9
	Kegelschnitte: Ellipse, Hyperbel, Parabel	10
4. Stereometrie	Prinzip von Cavalieri, Prismen und Pyramiden	11
	Kugel, Polyeder, Platonische Körper	12
	Körper mit runden Begrenzungsflächen	13
5. Funktionen	Umkehrfunktionen, Translation, Rotation	14
	Symmetrie, Betragsfunktion, Potenzfunktion	15
	Ganzrationale Funktionen, Geraden	16
	Parabeln, Gebrochenrationale Funktionen	17
	Exponential- und Logarithmusfunktionen	18
	Trigonometrische Funktionen	19
6. Gleichungen	Quadratische Gleichungen, Polynomgleichungen	21
7. Matrizen	Lineare Gleichungssysteme, Matrizen	22
8. Folgen und Reihen	Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen	24
	Grenzwerte, Grenzwertsätze, Regel von de l'Hôpital	25
	Mittelwerte, Harmonische Teilung, Vollst. Induktion	26
9. Finanzmathematik	Unterjährige Verzinsung, Rentenrechnung, Elastizität	27
10. Differentialrechnung	Differentialquotient, Ableitungsregeln	28
	Spezielle Punkte, Tabelle: Ableitungen, Stammfunktionen	29
11. Integralrechnung	Integrationsregeln	30
	Rotationsvolumen, Bogenlänge, Taylor, Potenzreihen	31
12. Vektorgeometrie	Elementare Vektoroperationen	32
	Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt	33
	Geradengleichungen	34
	Ebenengleichungen	35
13. Stochastik	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit, Mengenlehre	36
	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	37
	Binomialverteilung, Normalverteilung	38
	1-Var Statistik: Mittelwert, Median, Modalwert, Varianz	39
	2-Var Statistik: Lineare Regression	40
14. Math. Symbole	griechisches Alphabet	41
15. Stichwortverzeichnis		42

1 Zahlenmengen



- **Natürliche Zahlen:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- **Ganze Zahlen:** $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.
- **Rationale Zahlen:** Menge aller Brüche:
 $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} =$ Zahlen mit abbrechender oder periodischer Dezimalentwicklung.
- **Irrationale Zahlen:** $\mathbb{I} =$ Zahlen mit unendlicher, nichtabbrechender und nichtperiodischer Dezimalentwicklung.
- **Reelle Zahlen:** $\mathbb{R} =$ Vereinigung der Rationalen und Irrationalen Zahlen.
- **Komplexe Zahlen:**
 $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ mit $i^2 = -1$.

Komplexe Zahlen

► **Imaginäre Einheit:** $i^2 = -1$

► **Eulersche Formel:**

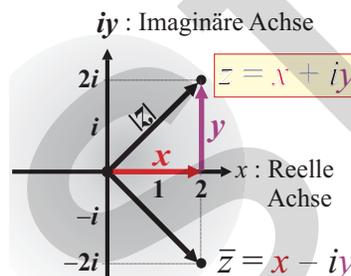
$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

$$e^{i\varphi} = \text{cis}(\varphi), \quad |e^{i\varphi}| = 1.$$

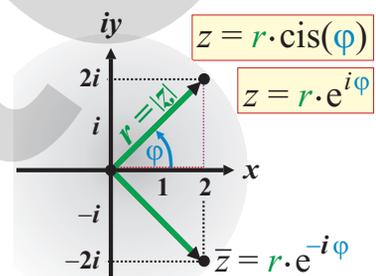
► **Gauss'sche Zahlenebene:**

xy -Ebene der kompl. Zahlen.

Kartesische Koordinaten



Polarkoordinaten



Komplexe Zahl	z	$z = x + iy$ $\begin{cases} x: \text{Realteil} \\ y: \text{Imaginärteil} \end{cases}$	$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \text{cis}(\varphi)$
Konjugierte	\bar{z}	$\bar{z} = x - iy$	$\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$
Betrag	$ z $	$ z = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$	$ z = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Winkel	φ	$x = r \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\varphi)$	$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ $\varphi = \arg(z)$
Addition Subtraktion	$z_1 + z_2$ $z_1 - z_2$	$(x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$	
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2$	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$	$r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division ($z_2 \neq 0$)	$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{ z_2 ^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$	$\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Inverse ($z \neq 0$)	$\frac{1}{z}$	$\frac{\bar{z}}{ z ^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$	$\frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}$
Potenzieren	z^n	$r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)) = r^n \cdot e^{in\varphi}$	
Radizieren	$\sqrt[n]{z}$	$\sqrt[n]{r} \cdot (\cos(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{\varphi + 2\pi k}{n})), \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$	

2 Algebra

2.1 Rechengesetze

	Addition	Multiplikation
Kommutativgesetz:	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz:	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
Distributivgesetz:	$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$	
Neutrales Element:	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Inverses Element:	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$a \cdot (a^{-1}) = (a^{-1}) \cdot a = 1$

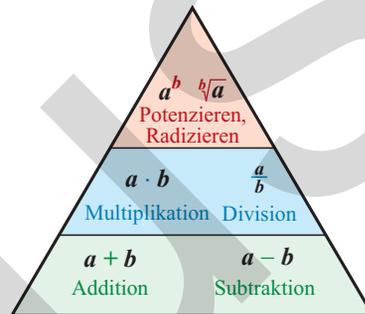


2.2 Reihenfolge der Operationen

Klammern vor Potenzieren, Radizieren vor Punktrechnung vor Strichrechnung

Freiwillige Klammern:

- $-1^2 = -(1)^2 = -1$
- $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot (3^4) = 162$
- $4 / 2 + 3 = (4 / 2) + 3 = 5$
- $2 + 3 \cdot 4 = 2 + (3 \cdot 4) = 14$



Obligatorische Klammern:

- $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$
- $(2 \cdot 3)^4 = 6^4 = 1296$
- $4 / (2 + 3) = 4 / 5 = 0.8$
- $(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$

2.3 Äquivalenzumformungen

Gleichung $a = b$		Ungleichung $a < b$
$a \pm c = b \pm c$	Addition, Subtraktion	$a \pm c < b \pm c$
$a \cdot c = b \cdot c$	Multiplikation mit $c \neq 0$	$a \cdot c < b \cdot c$ falls $c > 0$ $a \cdot c > b \cdot c$ falls $c < 0$ [*]
$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$	Division durch $c \neq 0$	$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ falls $c > 0$ $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ falls $c < 0$ [*]
$\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	Kehrwert ($a, b \neq 0$)	$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ falls $a \cdot b < 0$ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ falls $a \cdot b > 0$ [*]

[*]: Ungleichung ändert ihre Richtung.

2.4 Termumformungen, Binomischer Satz

Binomische Formeln:

1. Bin. Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

2. Bin. Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

3. Bin. Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

• $a^2 + b^2$ reell nicht zerlegbar.

• $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2)$

• $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$

• $a^n - b^n = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \cdot b^k$

Binomischer Satz:

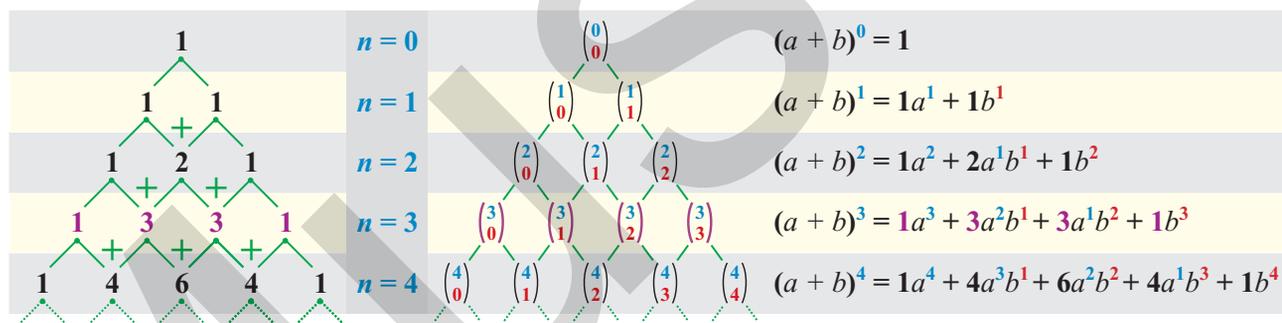
$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

• Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

• Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1! = 1$. (Siehe Kombinatorik auf S. 36)

• Für $(a - b)^n$ ist das Vorzeichen *alternierend*: $(a - b)^3 = +a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Binomischer Satz und pascalsches Zahlendreieck:



Betrag: $|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ „macht x immer positiv“. Siehe S. 15.

2.5 Bruchrechnen

Addition, Subtraktion	$\frac{a}{b} \pm \frac{x}{y} = \frac{a \cdot y}{b \cdot y} \pm \frac{x \cdot b}{y \cdot b} = \frac{a \cdot y \pm x \cdot b}{b \cdot y}$ $b, y \neq 0$	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Hauptnenner: $\text{kgV}(b, y)$, ▶ Brüche auf HN erweitern, ▶ Zähler addieren.
Multiplikation	$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{b \cdot y}$ $b, y \neq 0$	▶ „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“.
Division, Doppelbrüche	$\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}$ $b, x, y \neq 0$	▶ Division durch Bruch: Multiplikation mit dessen Kehrwert.

2.6 Potenzen

Definition: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ heisst n -te Potenz von a , wobei $\begin{cases} a \in \mathbb{R} : \text{Basis} \\ n \in \mathbb{N} : \text{Exponent.} \end{cases}$

Insbesondere: $a^1 = a$ und $\begin{cases} a^0 = 1, & \text{falls } a \neq 0 \\ 0^n = 0, & \text{falls } n > 0. \end{cases}$

• **Negative Exponenten \Rightarrow Nenner:** $k \cdot a^{-n} = \frac{k}{a^n} \quad a \neq 0.$

• **Rationale Exponenten \Rightarrow Wurzeln:** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a \geq 0, \quad n > 0.$

speziell: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{Quadratwurzel: } \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Potenzsätze

Gleiche Basis	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a \neq 0$
Gleicher Exponent	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$b \neq 0$
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$b \neq 0$
Doppelte Potenzen	$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$a \geq 0$

2.7 Logarithmen (siehe auch S. 18)

Definition	$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$	$a, x > 0, \quad a \neq 1$
Multiplikation, Division	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
Potenzen	$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x) \quad x > 0$	$a^x = b \Rightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
Basiswechsel	$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad \begin{matrix} a > 0; a \neq 1 \\ b > 0; b \neq 1 \end{matrix}$	speziell: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

\Rightarrow Siehe auch Logarithmusfunktionen auf S. 18.

3 Planimetrie

3.1 Allgemeine Dreiecke

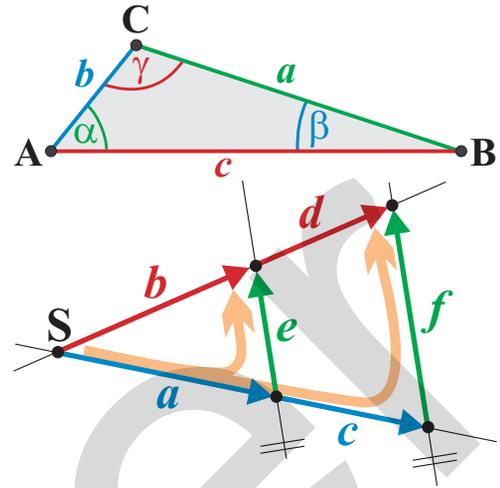
- **Winkelsumme:** $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

- **Dreiecksungleichung:** $c < a + b$

- **Ähnlichkeit, Strahlensätze:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie **gleiche Winkel** und / oder **gleiche Seitenverhältnisse** haben.

1. **Strahlensatz:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

2. **Strahlensatz:** $\frac{a}{e} = \frac{a+c}{f}$



- **Sinussatz:** $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2 \cdot R$ wobei R : Umkreisradius.

- **Cosinussatz:** $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$ und zyklisch: $\begin{matrix} b \\ \curvearrowright \\ c \\ \curvearrowright \\ a \end{matrix}$

- **Fläche:** $A_\Delta = \frac{1}{2} (\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}) = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$

- ▶ **Zwei Seiten und Zwischenwinkel:** $A_\Delta = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha)$ und zyklisch: $\begin{matrix} b \\ \curvearrowright \\ c \\ \curvearrowright \\ a \end{matrix}$

- ▶ **Drei Seiten (Heron):** $A_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

- ▶ **Drei Winkel und Umkreisradius R :** $A_\Delta = 2 R^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)$

3.2 Rechtwinklige Dreiecke

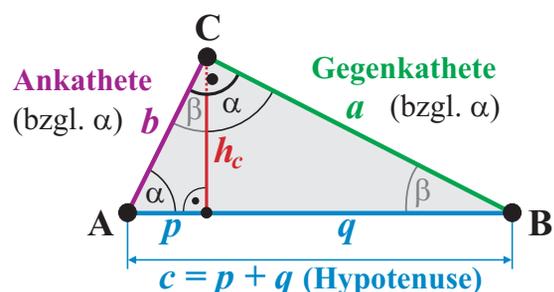
- **Satz von Pythagoras:** $c^2 = a^2 + b^2$

- **Höhensatz:** $h_c^2 = p \cdot q$

- **Kathetensatz (Satz von Euklid):**
 $a^2 = c \cdot q$ oder $b^2 = c \cdot p$

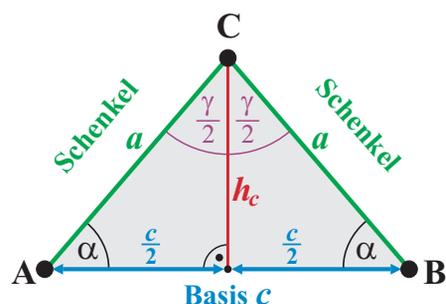
- **Trigonometrische Funktionen:**

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \quad (\text{Siehe auch S. 19})$$



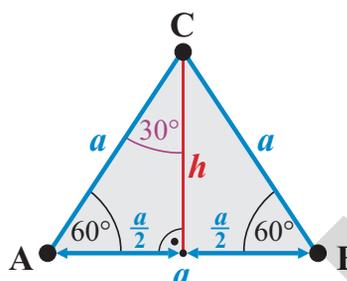
3.3 Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke

Gleichschenkliges Dreieck



- ▶ h_c halbiert die Basis c .
- ▶ h_c halbiert den Winkel γ .
- ▶ Gleiche Basiswinkel ($\alpha = \beta$).

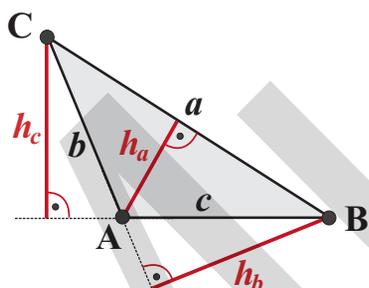
Gleichseitiges Dreieck



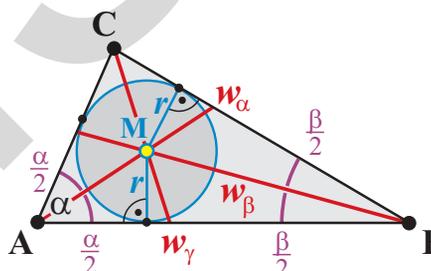
- ▶ Höhe: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$
- ▶ Fläche: $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
- ▶ Umkreisradius: $R = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{2}{3} h$
- ▶ Inkreisradius: $r = \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{1}{3} h$

3.4 Linien im Dreieck

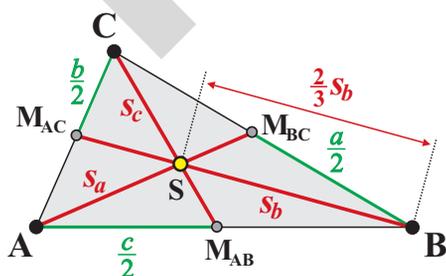
Höhen sind die Verbindungslinien von einem Eckpunkt zur gegenüberliegenden Seite (oder deren Verlängerung), welche zu dieser **senkrecht** stehen.



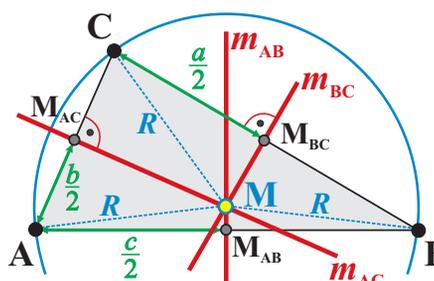
Winkelhalbierende (WH) halbieren einen Winkel des Dreiecks. Jeder Punkt auf einer WH hat zu den angrenzenden Seiten **gleicher Abstand**. Die WH schneiden sich im **Inkreismittelpunkt M** des Dreiecks.



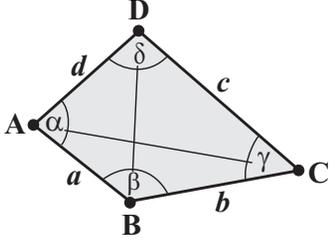
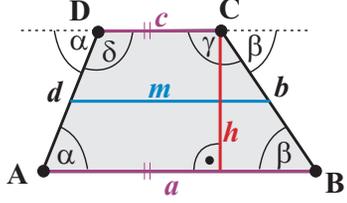
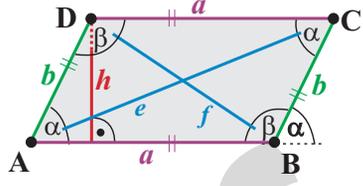
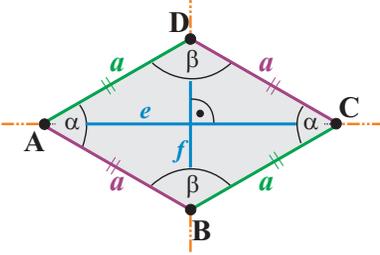
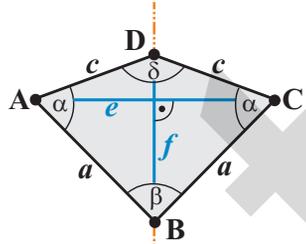
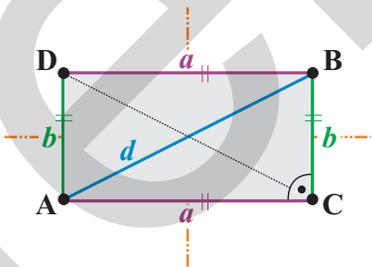
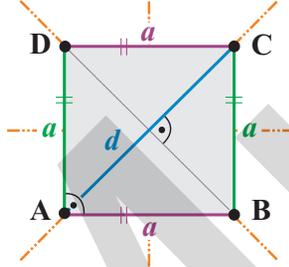
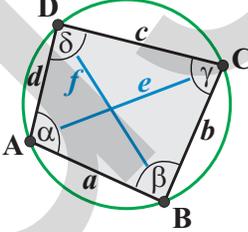
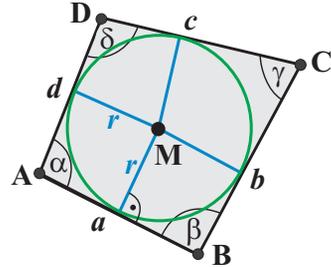
Seitenhalbierende verlaufen von einem Eckpunkt zum Seitenmittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Sie schneiden sich im **Verhältnis 2:1**. Ihr Schnittpunkt ist der **Schwerpunkt** (Massenmittelpunkt) des Dreiecks (vgl. S. 32).



Mittelsenkrechte sind die Menge aller Punkte, welche von zwei Endpunkten **gleichen Abstand** haben. Sie schneiden sich im **Umkreisradius M** des Dreiecks.

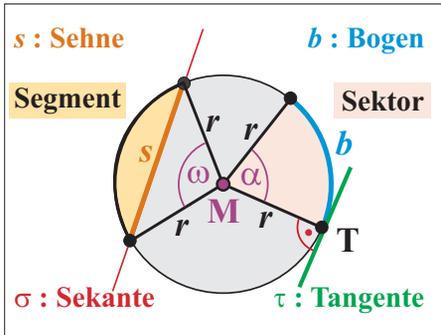


3.5 Vierecke

<p>Allgemeines Viereck</p>  <p>► $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$</p>	<p>Trapez</p>  <p>► $A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$</p>	<p>Parallelogramm</p>  <p>► $A = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$</p>
<p>Rhombus (Raute)</p>  <p>► $A = \frac{e \cdot f}{2} = a^2 \cdot \sin(\alpha)$</p>	<p>Drachenviereck</p>  <p>► $A = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot c \cdot \sin(\alpha)$</p>	<p>Rechteck</p>  <p>► $A = a \cdot b$</p>
<p>Quadrat</p>  <p>► $A = a^2$</p> <p>► $d = a \cdot \sqrt{2}$</p>	<p>Sehnenviereck</p>  <p>► $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$</p> <p>► $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$</p>	<p>Tangentenviereck</p>  <p>► $a + c = b + d$</p> <p>► $A = r \cdot \frac{a+b+c+d}{2}$</p>

Symmetrieachsen sind in oranger Farbe gekennzeichnet.

3.6 Kreis



Umfang

$$U = 2\pi \cdot r$$

Bogenlänge

$$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Fläche

$$A = \pi \cdot r^2$$

Sektor

$$A_{\text{Sektor}} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{b \cdot r}{2}$$

Segment

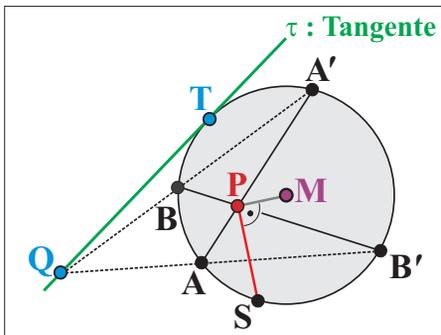
$$A_{\text{Seg}} = r^2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{\omega}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot \sin(\omega) \right)$$

Sehnensatz

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = \overline{PS}^2$$

Sekantensatz

$$\overline{QB} \cdot \overline{QA'} = \overline{QA} \cdot \overline{QB'} = \overline{QT}^2$$



► Kreisgleichung des Kreises K mit Mittelpunkt $M(u / v)$ und Radius r :

Mittelpunktsform

$$K: (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

ausmultiplizieren

Koordinatenform

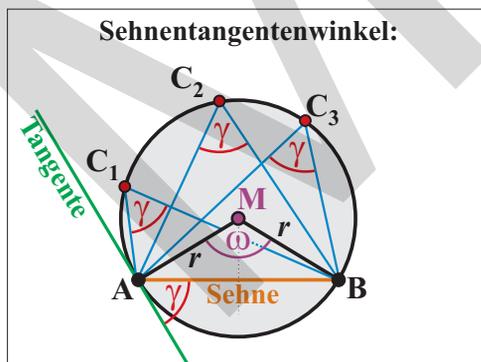
$$K: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

quadratisch ergänzen

Tangente τ an K im Punkt $T(x_0 / y_0)$:

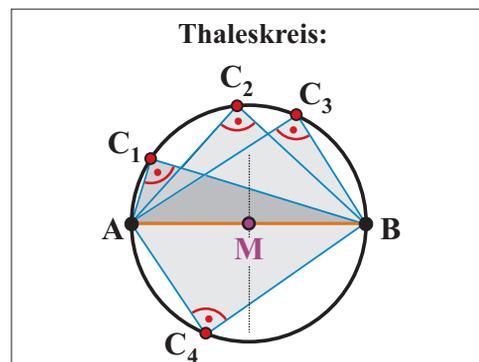
$$\tau: (x - u) \cdot (x_0 - u) + (y - v) \cdot (y_0 - v) = r^2$$

Kreiswinkelsätze



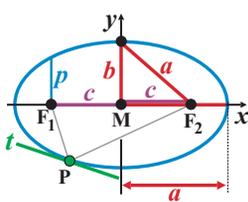
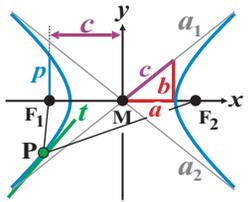
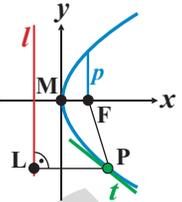
► gleiche Peripheriewinkel γ .

► Zentriwinkel $\omega = 2 \cdot \gamma$.



► gleiche Peripheriewinkel $\gamma = 90^\circ$.

3.7 Kegelschnitte

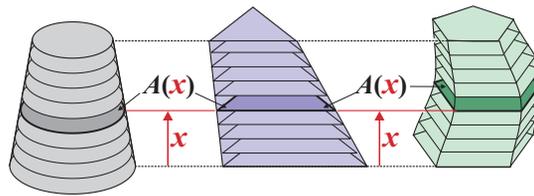
	Ellipse	Hyperbel	Parabel
Abstands-Eigenschaften			
Kurvengleichung Mittelpunkt M(0 / 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$
Parametergleichung Mittelpunkt M(0 / 0)	$x(\varphi) = a \cdot \cos(\varphi)$ $y(\varphi) = b \cdot \sin(\varphi)$	$x(\varphi) = \pm a \cdot \cosh(\varphi)$ $y(\varphi) = b \cdot \sinh(\varphi)$	
Tangentengleichung in P(x ₀ / y ₀)	$t: \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$	$t: \frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$	$t: y y_0 = p(x + x_0)$
Tangentenbedingung für $t: y = m_t x + q$	$q^2 = a^2 m_t^2 + b^2$	$q^2 = a^2 m_t^2 - b^2$	$q = \frac{p}{2m_t}$
Konjugierte Richtung	$m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$	$m_1 \cdot m_2 = +\frac{b^2}{a^2}$	
Lineare Exzentrizität	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	
Numerische Exzentrizität	$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$	$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$	$\varepsilon = 1$
Brennpunkte	$F_{1,2}(\pm c / 0)$	$F_{1,2}(\pm c / 0)$	$F(\frac{p}{2} / 0)$
Scheitelkrümmungs- Kreisradien	$r_a = \frac{b^2}{a}, r_b = \frac{a^2}{b}$	$r = \frac{b^2}{a}$	$r = p$
Parameter p (Quermass)	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$	p
Fläche	$A = \pi \cdot a \cdot b$		
Asymptoten		$a_{1,2}: y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$	

Verschiebung von M(0 / 0) auf M'(u / v): $x \mapsto (x - u)$ und $y \mapsto (y - v)$.

4 Stereometrie

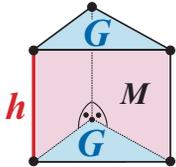
4.1 Prinzip von Cavalieri

Zwei Körper sind volumengleich, wenn deren Schnittfläche $A(x)$ in jeder Höhe x den gleichen Flächeninhalt haben.

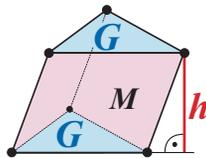


4.2 Prismen und Zylinder (Kongruente, parallele Grund- und Deckfläche)

Gerades Prisma



Schiefes Prisma



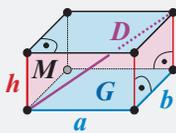
► G : Grundfläche; M : Mantelfläche.

► h : Höhe.

► Volumen: $V = G \cdot h$

► Oberfläche: $A = 2 \cdot G + M$

Quader

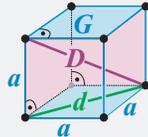


► $V = a \cdot b \cdot h$

► $A = 2(a \cdot b + a \cdot h + b \cdot h)$

► $D = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$

Würfel

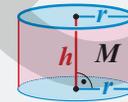


► $V = a^3$

► $A = 6 \cdot a^2$

► $D = a \cdot \sqrt{3}, d = a \cdot \sqrt{2}$

Zylinder



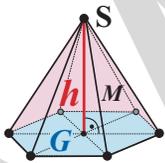
► $V = \pi r^2 \cdot h$

► $A = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

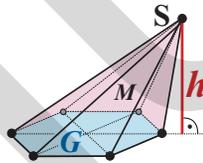
► $M = 2\pi r \cdot h$

4.3 Spitze Körper

Gerade Pyramiden



Schiefe Pyramiden



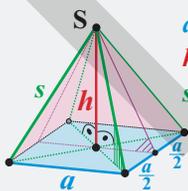
► G : Grundfläche; M : Mantelfläche.

► h : Höhe.

► Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

► Oberfläche: $A = G + M$

Gerade, quadratische Pyramide



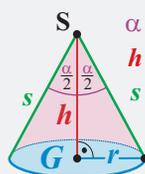
a : Grundkante
 h : Höhe
 s : Seitenkante

► $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$

► $A = a^2 + M$

► $s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$

Gerader Kreiskegel



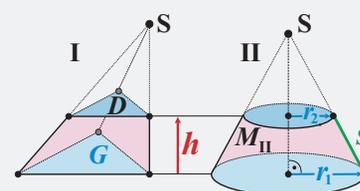
α : Öffnungswinkel
 h : Höhe
 s : Mantellinie

► $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

► $A = \pi r^2 + \pi r s, M = \pi r s$

► $s = \sqrt{h^2 + r^2}$

Pyramidenstumpf, Kegelstumpf

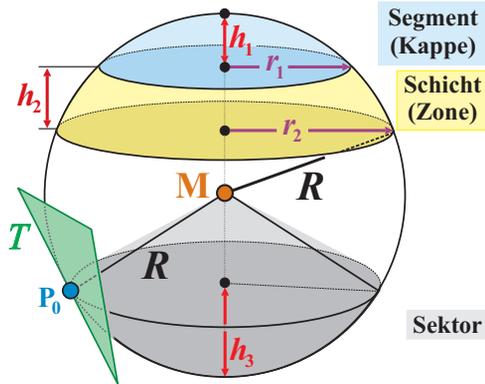


► $V_I = \frac{h}{3} (G + \sqrt{GD} + D)$

► $V_{II} = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

► $M_{II} = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$

4.4 Kugel



Volumen: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$

► **Segment:** $V = \frac{1}{3} \pi \cdot h_1^2 \cdot (3R - h_1)$

► **Schicht:** $V = \frac{1}{6} \pi \cdot h_2 \cdot (3r_1^2 + 3r_2^2 + h_2^2)$

► **Sektor:** $V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot h_3$

Oberfläche: $A = 4 \pi \cdot R^2$

► **Segment:** $M = 2 \pi R \cdot h_1$ (Kappe, Haube)

► **Schicht:** $M = 2 \pi R \cdot h_2$ (Zone)

► **Sektor:** $A = 2 \pi R \cdot h_3 + \pi R \sqrt{2Rh_3 - h_3^2}$

- **Kugelgleichung** einer Kugel mit Mittelpunkt $M(u / v / w)$ und Radius R :

Mittelpunktsform

ausmultiplizieren

Koordinatenform

$K: (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = R^2$

$K: x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

quadratisch ergänzen

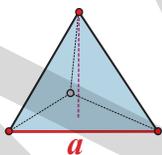
- **Tangentialebene T** an Kugel im Punkt $P_0(x_0 / y_0 / z_0)$:

$T: (x - u) \cdot (x_0 - u) + (y - v) \cdot (y_0 - v) + (z - w) \cdot (z_0 - w) = R^2$

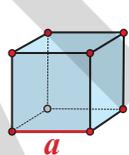
4.5 Polyeder und Platonische Körper

Polyedersatz (Euler): $e + f = k + 2$ wobei $\begin{cases} e: & \text{Anzahl Ecken} \\ f: & \text{Anzahl Flächen} \\ k: & \text{Anzahl Kanten.} \end{cases}$

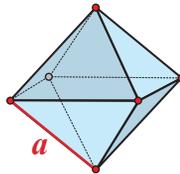
Es gibt genau 5 reguläre konvexe Körper (gleichlange Seiten und gleiche Winkel):



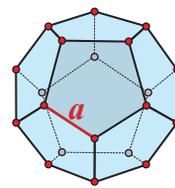
Tetraeder
(Vierflächner)



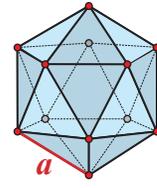
Hexaeder
(Sechseflächner)



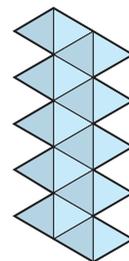
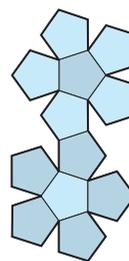
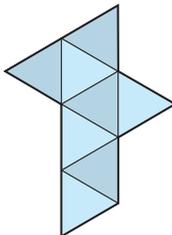
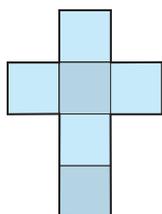
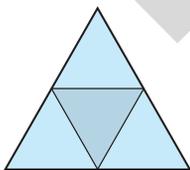
Oктаeder
(Achtflächner)



Dodekaeder
(Zwölflächner)

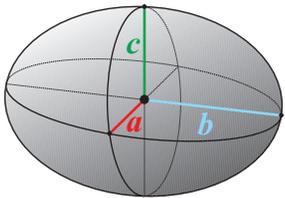
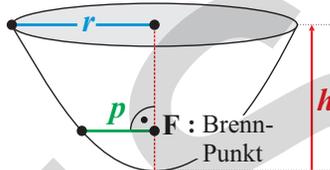
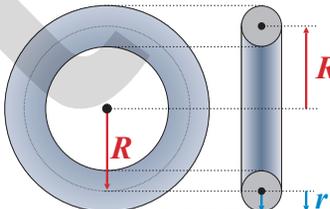


Ikosaeder
(Zwanzigflächner)

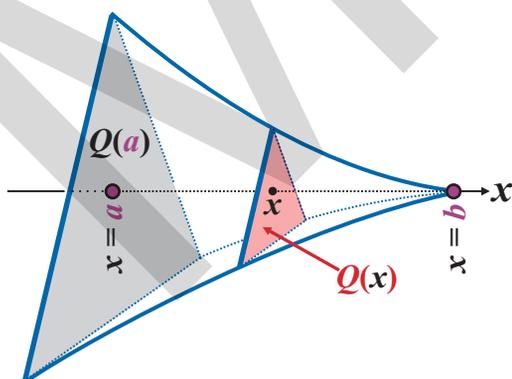


	Volumen V	Oberfläche A	Umkugelradius R	Inkugelradius r
Tetraeder	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$	$\sqrt{3} a^2$	$\frac{\sqrt{6}}{4} a$	$\frac{\sqrt{6}}{12} a$
Hexaeder	a^3	$6 a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2} a$	$\frac{1}{2} a$
Oktaeder	$\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$	$2 \sqrt{3} a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{2} a$	$\frac{\sqrt{6}}{6} a$
Dodekaeder	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4} a^3$	$3 \sqrt{5(5+2\sqrt{5})} a^2$	$\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4} a$	$\frac{\sqrt{10+4.4\sqrt{5}}}{4} a$
Ikosaeder	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12} a^3$	$5 \sqrt{3} a^2$	$\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4} a$	$\frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{12} a$

4.6 Körper mit runden Begrenzungsflächen

Ellipsoid	Paraboloid	Torus (Ring)
 <p>► $V = \frac{4}{3} \pi \cdot a \cdot b \cdot c$</p>	 <p>► $V = \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 \cdot h$ $= \pi \cdot p \cdot h^2$</p>	 <p>► $V = 2 \pi^2 \cdot r^2 \cdot R$ ► $A = 4 \pi^2 \cdot r \cdot R$</p>

4.7 Volumen eines Körpers mit Integralrechnung



- $V = \int_a^b Q(x) dx$

Querschnittsfläche $Q(x) \perp x$ -Achse.

- Spezialfall Rotationsvolumen:
 Durch $f(x)$ begrenztes Volumen,
 wenn diese um die x -Achse rotiert:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad \text{Siehe S. 31.}$$

5 Funktionen

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{W}$ ist eine Zuordnungsvorschrift von einer Zahlenmenge \mathbb{D} (Urbild, Definitionsmenge) nach \mathbb{W} (Bild, Wertemenge), welche jedem Element $x \in \mathbb{D}$ genau ein $y \in \mathbb{W}$ zuordnet:

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

Umkehrfunktion: $\bar{f} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{D}$ macht die Funktion f

„rückgängig“: $\bar{f}(f(x)) = x$ und $f(\bar{f}(y)) = y$

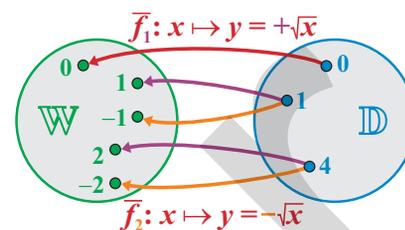
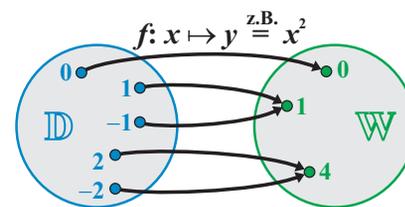
Damit eine Funktion eindeutig umkehrbar ist, muss im Allgemeinen deren maximaler Definitionsbereich \mathbb{D}_f so eingeschränkt werden, dass f streng monoton wird.

Ermittlung der Umkehrfunktion(en):

- *Graphisch:* Funktionsgraph an der 1. Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln.
- *Algebraisch:* $y = f(x)$ nach x auflösen, anschliessend x und y vertauschen.

Tabelle von Funktionen und Umkehrfunktionen:

Funktion	$y = f(x)$	\mathbb{D}_f	\mathbb{W}_f	$y = \bar{f}(x)$
Kehrwert	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Quadrat	x^2	\mathbb{R}	$y \geq 0$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
Potenz	x^n	\mathbb{R}	falls n gerade: $y \geq 0$ falls n ungerade: \mathbb{R}	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
Sinus	$\sin(x)$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$	$\arcsin(x)$
Cosinus	$\cos(x)$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$	$\arccos(x)$
Tangens	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{(n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	\mathbb{R}	$\arctan(x)$
Exponential	a^x	\mathbb{R}	$y > 0$	$\log_a(x)$
Exponential	10^x	\mathbb{R}	$y > 0$	$\log(x)$
Exponential	e^x	\mathbb{R}	$y > 0$	$\ln(x)$

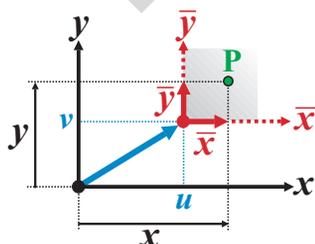


Definitionsbereich: Menge aller erlaubten x -Werte:

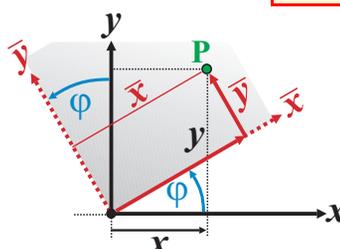
- $\frac{U(x)}{V(x)} \Rightarrow V(x) \neq 0$
- $\sqrt{g(x)} \Rightarrow g(x) \geq 0$
- $\log_a(g(x)) \Rightarrow g(x) > 0$

5.1 Translation, Rotation des Koordinatensystems

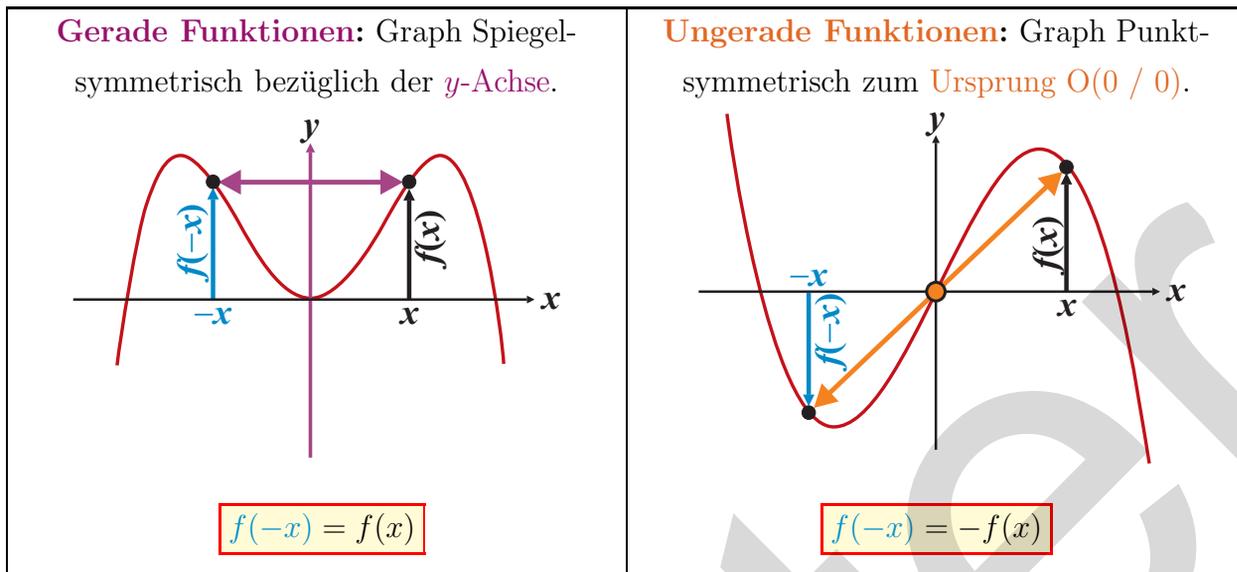
Translation um $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$: $\bar{x} = x - u$
 $\bar{y} = y - v$



Rotation um φ : $\bar{x} = x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi)$
 $\bar{y} = -x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi)$



5.2 Symmetrie

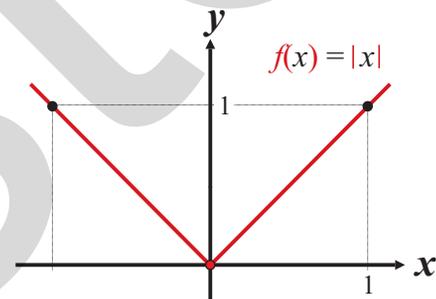


5.3 Betragsfunktion

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

„macht x positiv“.

- $|x|$ ist in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
- $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.



5.4 Potenzfunktionen

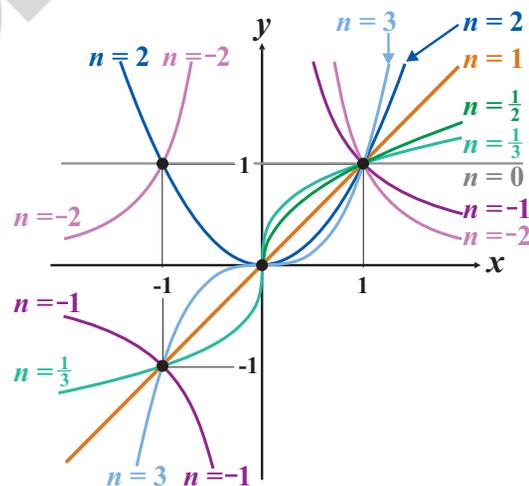
Potenzfunktionen: $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Q}$

- $n = 0$ Konstante Funktion.
- $0 < n < 1$ Wurzelfunktionen.
- $n = 1$ Lineare Funktion.
- $n \in \mathbb{N}; n > 1$ Parabeln n -ter Ordnung.
- $n \in \mathbb{N}; n < 0$ Hyperbeln n -ter Ordnung.

Der Graph von $f(x) = x^n$ ist...

- ...spiegelsymmetrisch zur y -Achse, falls n gerade.
- ...punktsymmetrisch zum Ursprung, falls n ungerade.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

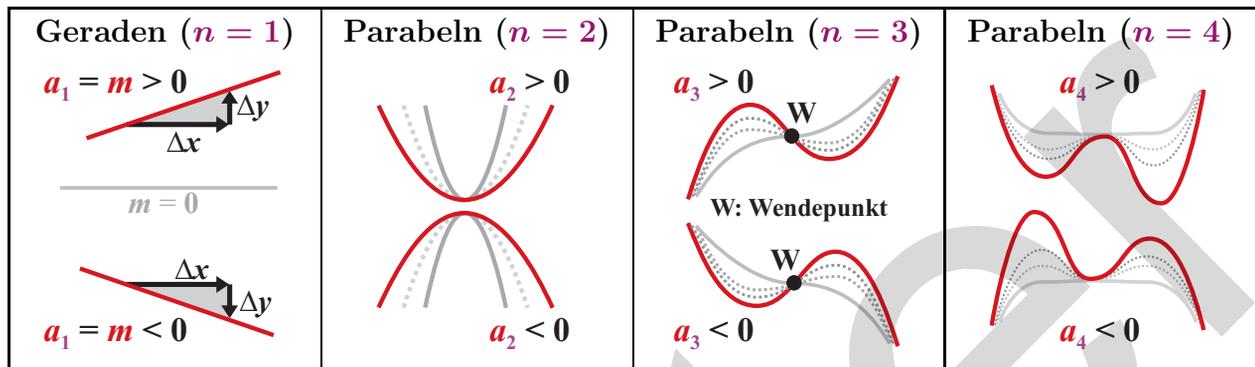


5.5 Ganzrationale Funktionen (Polynome, Parabeln n -ten Grades)

$$y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k \quad \text{mit} \quad \begin{cases} n : \text{Grad, Ordnung} \\ a_n \neq 0. \end{cases}$$

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ heissen **Koeffizienten** von $f(x)$.

Übersicht des grundsätzlichen Aussehens von Polynomfunktionen:



5.5.1 Geraden, lineare Funktionen ($n = 1$): $y = m \cdot x^1 + q$ (Siehe S. 34)

► Normalform: $g: y = m \cdot x + q$

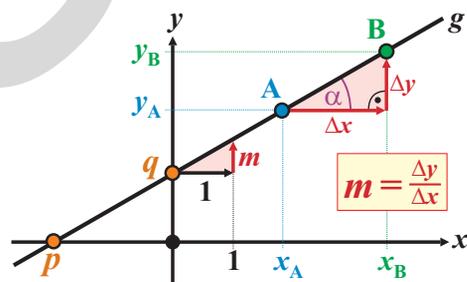
► Punkt-Steigungsform: $g: y = m \cdot (x - x_A) + y_A$ mit $A(x_A / y_A) \in g$

• **Steigung:** $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan(\alpha)$

• **y-Achsenabschnitt:** q .

► Achsenabschnittsform: $g: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ mit

den **Achsenabschnitten** $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{\pm\infty\}$.



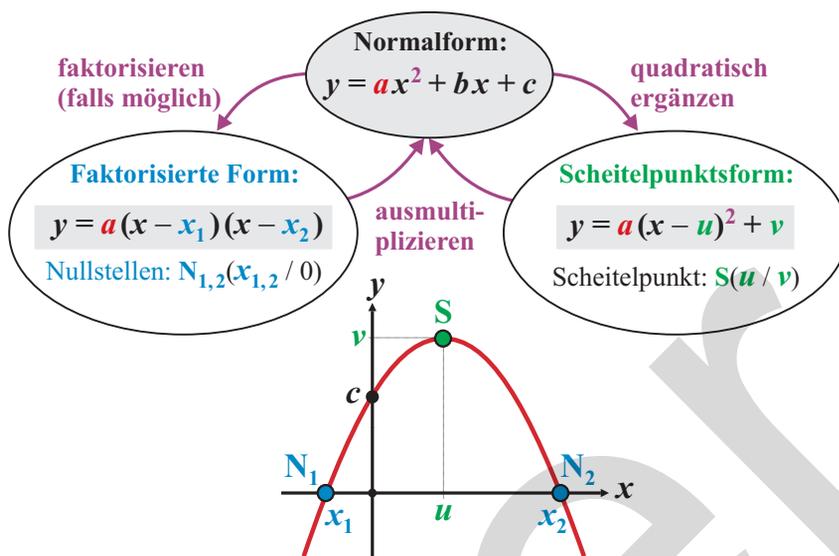
Parallele Geraden	Senkrechte Geraden	Schnittwinkel von g und h
$g \parallel h \Leftrightarrow m_g = m_h$	$g \perp h \Leftrightarrow m_h = \frac{-1}{m_g}$	$\tan(\varphi) = \left \frac{m_h - m_g}{1 + m_h \cdot m_g} \right $

► Parameterform und Koordinatenform der Geraden: Siehe S. 34.

5.5.2 Parabeln ($n = 2$): $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

- a : Öffnung:
 $a < 0 \Rightarrow$ nach unten \cap
 $a > 0 \Rightarrow$ nach oben \cup
 $a = 1 \Rightarrow$ Normalparabel.
- b : linearer Term.
- c : y -Achsenabschnitt.
- Scheitelpunkt $S(u / v)$:
 $S(-\frac{b}{2a} / \frac{-b^2 + 4ac}{4a})$

\Rightarrow Lösungsformel quadratische Gleichungen S. 21.



5.6 Gebrochenrationale Funktionen

Eine **gebroychenrationale Funktion** $f(x)$ ist eine Funktion von folgender Bauart:

$$f(x) = \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{\text{Zählerpolynom}}{\text{Nennerpolynom}} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Koeffizienten: $a_n, b_m \neq 0$.

Zählergrad: $n \in \mathbb{N}_0$; Nennergrad: $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

- **Polgeraden (vertikale Asymptoten):** $y \rightarrow \pm\infty$
 x_0 heisst Pol von f wenn gilt:
 $y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ („echte“ Division durch Null).

- **Asymptote:** Anschmiegfunktion $a(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$

- $n < m$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow a : y = 0$
- $n = m$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \Rightarrow a : y = \frac{a_n}{b_m}$
- $n > m$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ Zerlege

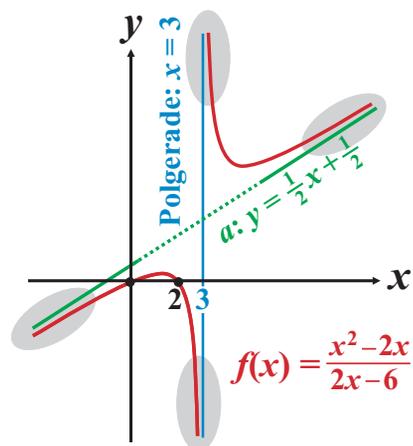
$$f(x) = \frac{U(x)}{V(x)} = a(x) + \frac{\text{Rest}(x)}{V(x)} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{Rest}(x)}{V(x)} = 0$$

Division = Polynomdivision

\Rightarrow Für $n = m + 1$ ist $a(x)$ schiefe, gerade Asymptote.

$\Rightarrow a(x)$: ganzrationale Funktion vom Grad $n - m$.

\Rightarrow Grenzwerte siehe S. 25.



5.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen

► **Exponentialfunktionen:** $y = f(x) = a^x$ $a > 0$

• **Eulersche Zahl:** $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718\dots$

• Wachstums- oder Zerfallsprozesse:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t \quad \text{oder} \quad N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

wobei:

t : Zeit.

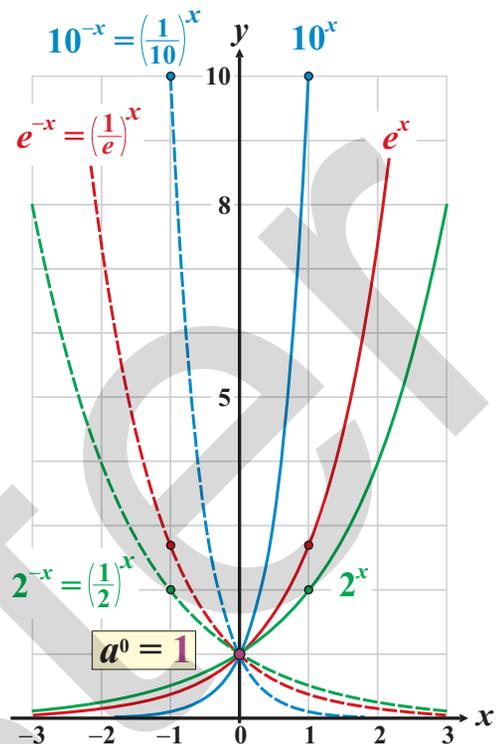
N_0 : Startwert (Population bei $t = 0$).

$N(t)$: Population zur Zeit t .

$a = e^k$: Wachstumsfaktor: $a = 1 + \frac{p}{100}$ mit

p : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Wachstum} \quad (p > 0) \\ \text{Zerfall} \quad (p < 0) \end{array} \right\}$ in %

pro Zeiteinheit.



⇒ Potenzsätze, Logarithmensätze siehe S. 5.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

⇒ Grenzwerte siehe S. 25.

► **Logarithmusfunktionen:** $\bar{f}(x) = \log_a(x)$ $x > 0$
 $a > 0; a \neq 1$.

$\bar{f}(x) = \log_a(x)$ ist Umkehrfunktion zu $f(x) = a^x$:

• **Zehnerlogarithmus:**

$$\bar{f}(x) = \log_{10}(x) = \log(x)$$

$$\log(10^x) = x, \quad 10^{\log(x)} = x \quad (x > 0)$$

• **Natürlicher Logarithmus:**

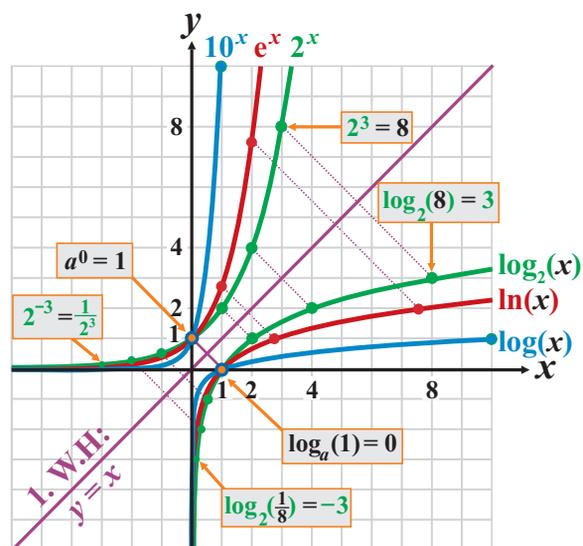
$$\bar{f}(x) = \log_e(x) = \ln(x)$$

$$\ln(e^x) = x, \quad e^{\ln(x)} = x \quad (x > 0)$$

• **Binärer Logarithmus:**

$$\bar{f}(x) = \log_2(x) = \text{lb}(x)$$

$$\log_2(2^x) = x, \quad 2^{\log_2(x)} = x \quad (x > 0)$$



⇒ Potenz- und Logarithmensätze siehe S. 5.

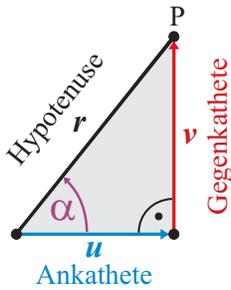
⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

5.8 Trigonometrische Funktionen

► **Definition:** (siehe auch S. 6)

Rechtwinkliges Dreieck: $0 < \alpha < 90^\circ$.

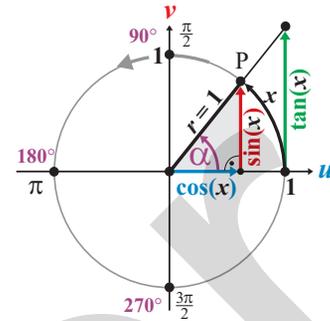
Einheitskreis: $\alpha \in \mathbb{R}$.



$$\sin(\alpha) = \frac{v}{r} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

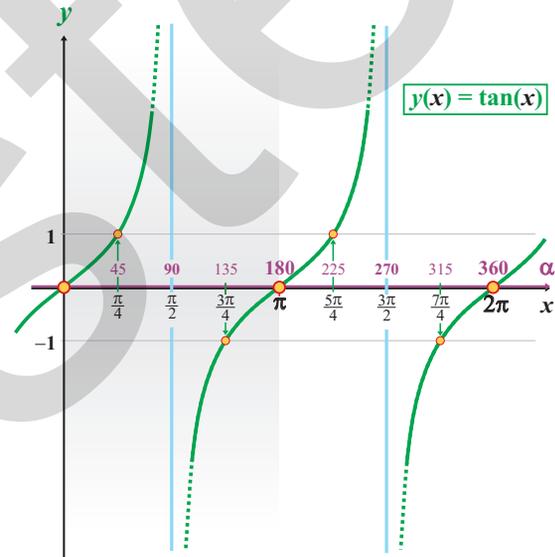
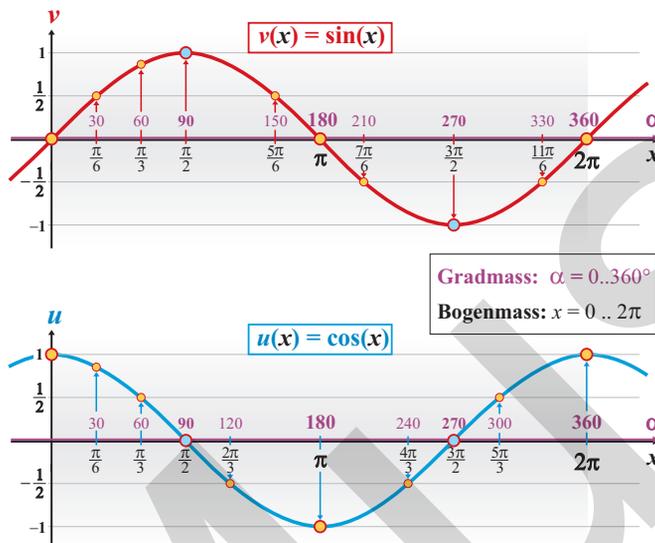
$$\cos(\alpha) = \frac{u}{r} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{v}{u} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$



Bogenmass: $x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ zu α gehörende **Bogenlänge** x am Einheitskreis.

► **Funktionsgraphen:**



► **Eigenschaften und spezielle Werte:**

	$0^\circ \doteq 0$	$30^\circ \doteq \frac{\pi}{6}$	$45^\circ \doteq \frac{\pi}{4}$	$60^\circ \doteq \frac{\pi}{3}$	$90^\circ \doteq \frac{\pi}{2}$	Periode	Symmetrie
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$360^\circ \doteq 2\pi$ $\sin(x + 2\pi n) = \sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$360^\circ \doteq 2\pi$ $\cos(x + 2\pi n) = \cos(x)$	$\cos(2\pi - x) = \cos(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$(\pm\infty)$	$180^\circ \doteq \pi$ $\tan(x + \pi n) = \tan(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$

► **Definitionsbereich:** $\mathbb{D}_{\sin} = \mathbb{D}_{\cos} = \mathbb{R}$ $\mathbb{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{(\frac{\pi}{2} + n\pi), n \in \mathbb{Z}\}$.

► **Wertebereich:** $\mathbb{W}_{\sin} = \mathbb{W}_{\cos} = [-1, 1]$ $\mathbb{W}_{\tan} = \mathbb{R}$.

► **Umkehrfunktionen:** $\begin{cases} \arcsin(x) & \text{manchmal auch } \sin^{-1}(x) \\ \arccos(x) & \text{manchmal auch } \cos^{-1}(x) \\ \arctan(x) & \text{manchmal auch } \tan^{-1}(x). \end{cases}$ Ableitungen, Stamm-Funktionen S. 29.

Beziehungen und Eigenschaften trigonometrischer Funktionen

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin(x)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \frac{1}{\tan(x)}$
$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$	$\cos(2x) = \begin{cases} 2 \cos^2(x) - 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 - 2 \sin^2(x) \end{cases}$	$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
$\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$	$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$	$\tan(3x) = \frac{3 \tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3 \tan^2(x)}$
$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$	$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$	$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$
$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$	$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$	
$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$	$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \cdot \tan(y)}$	
$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	
$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

6 Gleichungen

6.1 Fundamentalsatz der Algebra

In \mathbb{R} kann jedes Polynom n -ten Grades als Produkt von $k \leq n$ **Linearfaktoren** und nicht weiter zerlegbaren quadratischen Faktoren $q(x)$, welche nicht Null werden können, dargestellt werden:



In den komplexen Zahlen \mathbb{C} zerfällt jedes Polynom n -ten Grades vollständig in **Linearfaktoren**.

6.2 Quadratische Gleichungen

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Diskriminante: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad D \geq 0$

Satz von Vieta:

Produkt der Lösungen: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Summe der Lösungen: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

⇒ Quadratische Funktionen siehe S. 17.

6.3 Polynomgleichungen dritten und höheren Grades

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Satz: Division durch $a \neq 0$ führt auf $a' = 1$, also $x^3 + b' \cdot x^2 + c' \cdot x + d' = 0$. Wenn es eine ganzzahlige Lösung x_1 gibt, dann ist diese Teiler von d' . Finde Lösung x_1 durch Einsetzen (Probieren) der Teiler von d' und dividiere die Gleichung anschliessend durch $(x - x_1)$.

6.4 Numerische Verfahren zur Nullstellenberechnung

Gesucht ist die Nullstelle $N(x_N / 0)$ von $f(x)$. Ausgehend von einem Startwert x_1 , konstruiere eine rekursiv definierte Zahlenfolge x_1, x_2, x_3, \dots mit **Grenzwert** x_N .

► Sehnenverfahren (Regula Falsi)

Wähle $P(a / f(a))$ und $Q(b / f(b))$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$.

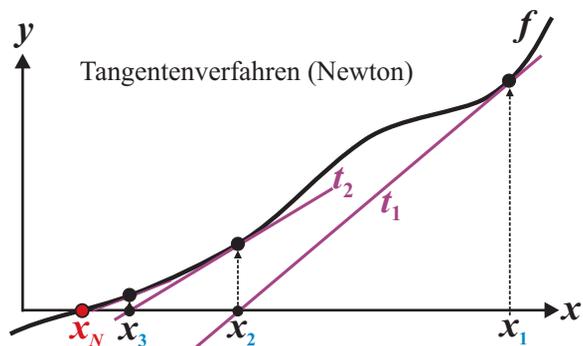
Mit Startwert $x_1 = a$ berechne:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_N$$

► Tangentenverfahren von Newton

Wähle $P_1(x_1 / f(x_1))$ mit $f'(x_1) \neq 0$. Dann:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_N \quad (\text{die Folge ist nicht notwendigerweise konvergent.})$$



7 Matrizen, lineare Gleichungssysteme

7.1 Lineare Gleichungssysteme, 2×2 Matrizen

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{kurz: } \boxed{M \cdot \vec{x} = \vec{c}}$$

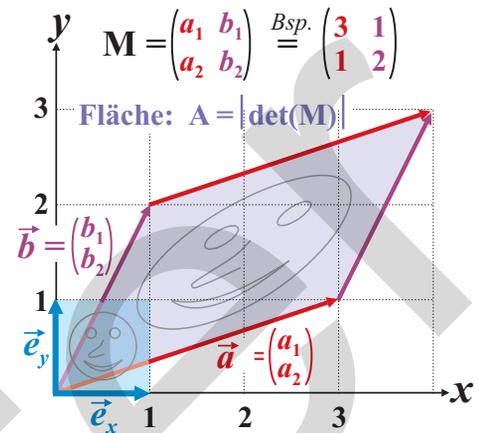
- Multiplikation von Links mit der Inversen M^{-1} von M löst die Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{c}$ nach \vec{x} auf:

$$\boxed{\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{c}} \quad (\text{falls } M^{-1} \text{ existiert}).$$

- Die Matrix $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ stellt eine lineare Transformation von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dar: $\vec{x} \mapsto \vec{c} = M \cdot \vec{x}$
Jedem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird genau ein Vektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ zugeordnet.}$$

- Die **Spalten** \vec{a}, \vec{b} der Matrix sind die **Bilder der Einheitsvektoren** unter der Transformation M .



7.2 Operationen und Eigenschaften von Matrizen:

► **Einheitsmatrizen:** $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$

► **Addition:** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm u_1 & b_1 \pm v_1 \\ a_2 \pm u_2 & b_2 \pm v_2 \end{pmatrix}$

• $M_1 \pm M_2 = M_2 \pm M_1$

• $(M_1 + M_2) + M_3 = M_1 + (M_2 + M_3)$

► **Multiplikation mit reeller Zahl:** $k \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k a_1 & k b_1 \\ k a_2 & k b_2 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

► **Multiplikation mit Vektor:** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix}$

► **Produkt zweier Matrizen:** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1u_1 + b_1u_2 & a_1v_1 + b_1v_2 \\ a_2u_1 + b_2u_2 & a_2v_1 + b_2v_2 \end{pmatrix}$

• $M_1 \cdot M_2 \neq M_2 \cdot M_1$

• $(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)$

► **Transponierte:** $M^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $M^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

- $(M_1 + M_2)^T = M_1^T + M_2^T$
- $(M_1 \cdot M_2)^T = M_2^T \cdot M_1^T$
- $(M^T)^T = M$

► **Inverse Matrix:** $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = E_n$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \det(M) \neq 0.$$

Allgemein: $[M \mid E_n] \xrightarrow{\text{Gauss}} [E_n \mid M^{-1}]$

- $(M_1 \cdot M_2)^{-1} = M_2^{-1} \cdot M_1^{-1}$

- $(M^{-1})^{-1} = M$

- $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$

► **Determinante:** $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - b_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

- $\det(E_n) = 1$

- $\det(A^T) = \det(A)$ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

- $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$

► **Rang:** Anzahl linear unabhängige Zeilen (Spalten) einer Matrix. M heisst...

- Reguläre $n \times n$ Matrix: $\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(M) = n \Leftrightarrow M^{-1}$ existiert.
- Singuläre $n \times n$ Matrix: $\det(M) = 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(M) < n \Leftrightarrow M^{-1}$ existiert nicht.

► **Orthogonale Matrizen:** $M \cdot M^T = M^T \cdot M = E$ oder $M^T = M^{-1}$

► **Eigenvektoren, Eigenwerte:** Der Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heisst **Eigenvektor** der Matrix M zum **Eigenwert** λ , falls $M \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ gilt. Die Abbildung M ändert die Richtung von \vec{v} nicht.

- **Eigenwertgleichung:** $\det(M - \lambda \cdot E_n) = 0$ $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots$

- Bestimmung der **Eigenvektoren** $\vec{v}_k \neq \vec{0}$: $(M - \lambda_k \cdot E_n) \cdot \vec{v}_k = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$

► **Elementare Matrizenmanipulationen (Gauss'scher Algorithmus)**

- Multiplikation der Zeilen mit einer Zahl.
- Addition zweier Zeilen.
- Vertauschung zweier Zeilen.

Lineare Gleichungssysteme lösen:

- Lineares Gleichungssystem als Matrix schreiben: $[M \mid \vec{c}]$.
- Mit dem Gausschen Algorithmus M auf Einheitsmatrix transformieren.

► **Spezielle Matrizen:**

$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ dreht den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um den Winkel α im GUZ,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ spiegelt $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ an der x -Achse, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ spiegelt $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ an der y -Achse.

8 Folgen und Reihen

Eine **Zahlenfolge** a_1, a_2, a_3, \dots ist eine **Funktion** $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$.

- **Explizite Funktionsvorschrift:** $a_n = \{\text{Formel mit } n\}$.
- **Rekursive Darstellung:** $a_{n+1} = \{\text{Formel mit } a_n, a_{n-1}, \dots\}$ mit Startwert a_1 .

Eine **Reihe** s_1, s_2, s_3, \dots ist die Folge der **Teilsommen** einer gegebenen Folge $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$s_1 = a_1 \xrightarrow{+a_2} s_2 = a_1 + a_2 \xrightarrow{+a_3} s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \dots s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

8.1 Arithmetische Folgen (AF), arithmetische Reihen (AR)

Konstante Differenz $d = a_2 - a_1$ }
 aufeinanderfolgender Glieder: $a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} \dots$

	Rekursionsformel	Explizite Formel
Folge	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
Reihe	$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$	$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)$

8.2 Geometrische Folgen (GF), geometrische Reihen (GR)

Konstanter Quotient $q = \frac{a_2}{a_1}$ }
 aufeinanderfolgender Glieder: $a_1 \xrightarrow{\cdot q} a_2 \xrightarrow{\cdot q} a_3 \xrightarrow{\cdot q} \dots$

	Rekursionsformel	Explizite Formel
Folge	$a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Reihe	$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$	$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $q \neq 1$, $s_n = n \cdot a_1$ für $q = 1$. $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$ falls $ q < 1$ (unendliche GR)

8.3 Weitere Reihen

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (\text{Harmonische Reihe})$$

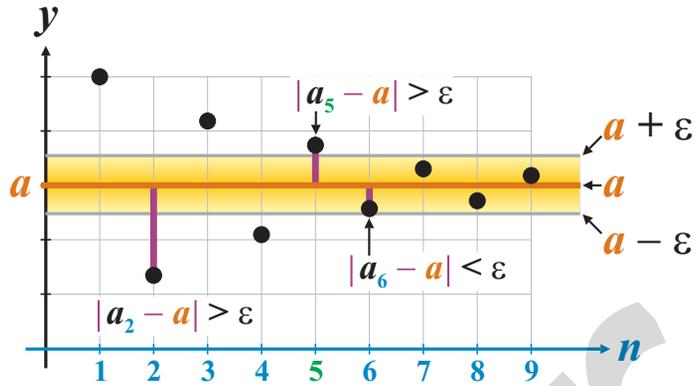
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{1}{2} n(n+1)\right)^2$$

8.4 Grenzwerte

Definition: Eine Folge a_n heisst **konvergent** mit **Grenzwert** $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, wenn es zu **jeder** beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ einen **Index** $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Für (beliebig) grosse n wird der **Abstand** von a_n zum **Grenzwert** a beliebig klein (kleiner als jedes $\varepsilon > 0$).



- Ein **Grenzwert** ist immer **eindeutig** und **endlich**.
- Folgen **ohne Grenzwert** oder solche mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ heissen **divergent**.
- **Nicht definiert sind:** $\frac{0}{0}$, $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$, $0 \cdot (\pm\infty)$ und $\infty - \infty$

► **Grenzwertsätze:** Falls $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existieren, gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$

⇒ Entsprechende Sätze gelten auch für Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

► **Häufige Grenzwerte:**

- $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } -1 < a < 1 \\ 1, & \text{falls } a = 1 \\ \infty, & \text{falls } a > 1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \pm 0} \frac{1}{n} = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ \pm\infty, & n > m \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

► **Dominanzregel:**

Exponentielles Wachstum ist stärker als Potenzwachstum: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

Potenzwachstum ist stärker als logarithmisches Wachstum: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ für $n > 0$.

► **Regel von de l'Hôpital:** Gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (oder ∞) und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (oder ∞), dann:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{Bsp: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

8.5 Mittelwerte

Gegeben seien n verschiedene Werte x_1, x_2, \dots, x_n .

- Ungewichteter arithmetischer Mittelwert: $\bar{x}_A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ (vgl. S. 39)

- Gewichteter arithmetischer Mittelwert: $\bar{x}_A = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$

p_1, p_2, \dots, p_n bezeichnen die Gewichte (relative Häufigkeiten) der Werte x_1, x_2, \dots, x_n .

- Quadratischer Mittelwert: $\bar{x}_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$

- Geometrischer Mittelwert: $\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$

- Harmonischer Mittelwert: $\bar{x}_H = n \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)^{-1}$ $x_k \neq 0$.

- Ungleichung: $\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A \leq \bar{x}_Q$ gilt, falls $x_k \geq 0$ für alle $k = 1, 2, \dots, n$.

8.6 Harmonische Teilung, Goldener Schnitt

Unter dem Goldenen Schnitt Φ versteht man das harmonische Teilungsverhältnis $\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ Daraus folgt:

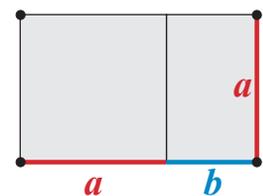
$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \Phi = 1.618\dots \\ \bar{\Phi} = -0.618\dots \end{cases}$$

Eigenschaften:

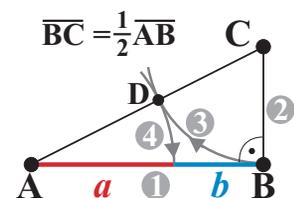
- $\bar{\Phi} = -\frac{1}{\Phi}$
- Φ ist irrational und hat auch folgende Darstellungen:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \quad \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Harmonisches Rechteck:



Harmonische Teilung der Strecke \overline{AB} :



8.7 Vollständige Induktion

Beweisverfahren für Aussagen \mathbb{A}_n über natürliche Zahlen.

- (I) **Verankerung:** Überprüfe \mathbb{A}_1 . (Anstatt $n = 1$ kann ein anderer Startwert gewählt werden, der Beweis gilt dann ab dieser Zahl.)

- (II) **Vererbung (Schritt von n nach $n + 1$):**

Zeige rekursiv, dass \mathbb{A}_{n+1} korrekt ist, unter der Voraussetzung, dass \mathbb{A}_n stimmt.

9 Finanzmathematik

Aufzinsfaktor: $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i$ $p = \text{Zins (jährlich) in \%}$, $i = \frac{p}{100} = \text{Zinssatz}$.

► **Verzinsung mit Zinseszins:** Startkapital K_0 , Laufzeit n Jahre:



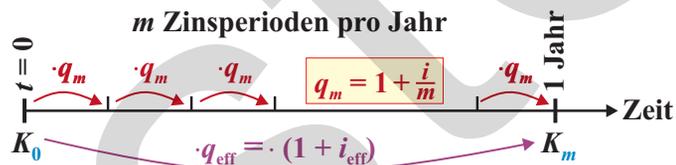
► **Unterjährige Verzinsung:**

Linear:	mit Zinseszins:	Stetig:
Kapital K_T nach T Tagen ohne Zinseszins:	m Zinsperioden pro Jahr, Laufzeit: n Jahre.	Kontinuierlich wird ein beliebig kleiner Zins bezahlt:
$K_T = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{T}{360}$	$K_{n \cdot m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}$	$K_S = \lim_{m \rightarrow \infty} K_{n \cdot m} = K_0 \cdot e^{i \cdot n}$

Effektiver Jahreszinssatz:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

$$q_m = \sqrt[m]{q_{\text{eff}}}$$



► **Rentenrechnung:** Zum Startkapital K_0 werden n Renten R bezahlt:

Vorschüssige Rentenzahlung		Nachschüssige Rentenzahlung	
Barwert $B_0 =$	Endwert $E_n =$	Barwert $B_0 =$	Endwert $E_n =$
$K_0 + \frac{R}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$K_0 q^n + R q \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$K_0 + \frac{R}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$K_0 q^n + R \frac{q^n - 1}{q - 1}$

⇒ Bei Schuldentilgung heisst R Tilgungsrate oder Annuität. (vgl. S. 24)

► **Ableitungen in der Finanzmathematik:**

Marginale Funktion (Grenzfunktion)

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Wachstumsrate

$$r(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln(f(t))$$

Elastizität

$$\varepsilon_f(x) = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

10 Differentialrechnung

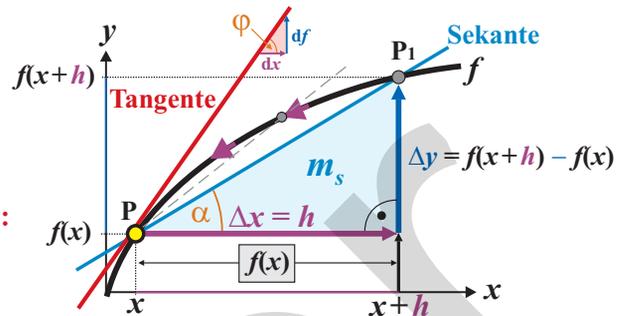
Voraussetzung: Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$.

• **Sekantensteigung, Differenzenquotient:**

Mittlere Änderungsrate (Steigung)

von f im Intervall $[x, x + h]$:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan(\alpha)$$



• **Tangentensteigung, Differentialquotient:**

Lokale Änderungsrate (Steigung)

von f im Punkt $P(x / f(x))$,

Definition der 1. Ableitung:

$$m_t = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan(\varphi)$$

Steigung
siehe S. 16.

10.1 Ableitungsregeln:

Seien $y = f(x)$, $y = u(x)$ und $y = v(x)$ stetige Funktionen, c eine Konstante.

► **Additive Konstante:** $f(x) = u(x) \pm c$

$$f'(x) = u'(x)$$

► **Multiplikative Konst.:** $f(x) = c \cdot u(x)$

$$f'(x) = c \cdot u'(x)$$

► **Summenregel:** $f(x) = u(x) \pm v(x)$

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

► **Produktregel:** $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

► **Quotientenregel:** $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

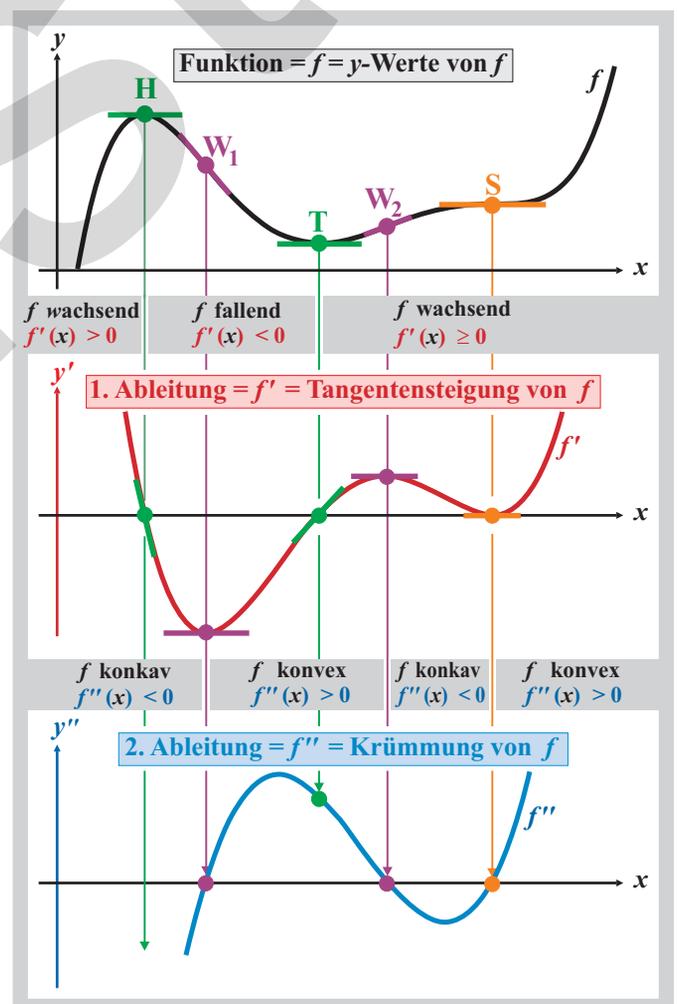
$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

► **Kettenregel:** $f(x) = u(v(x))$

$$f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

„Äussere mal innere Ableitung.“

Bedingungen für Extrema und Wendepunkte:
Zusammenhang zwischen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$:

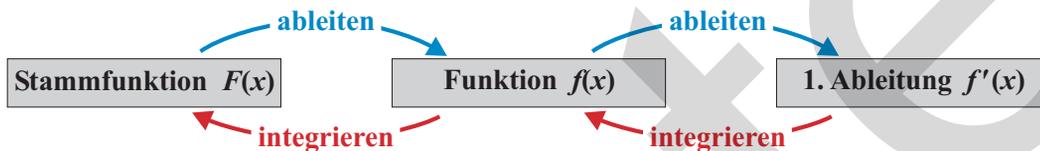


10.2 Bedingungen spezieller Punkte:

		f	f'	f''	f'''
Nullstelle	$N(x_N / 0)$	$f(x_N) = 0$	-	-	-
Hochpunkt	$H(x_H / f(x_H))$		$f'(x_H) \stackrel{\star}{=} 0$	$f''(x_H) \stackrel{\blacklozenge}{<} 0$	-
Tiefpunkt	$T(x_T / f(x_T))$		$f'(x_T) \stackrel{\star}{=} 0$	$f''(x_T) \stackrel{\blacklozenge}{>} 0$	-
Sattelpunkt Terrassenp.	$S(x_S / f(x_S))$		$f'(x_S) \stackrel{\star}{=} 0$	$f''(x_S) \stackrel{\star}{=} 0$	$f'''(x_S) \stackrel{\blacklozenge}{\neq} 0$
Wendepunkt	$W(x_W / f(x_W))$		-	$f''(x_W) \stackrel{\star}{=} 0$	$f'''(x_W) \stackrel{\blacklozenge}{\neq} 0$

★ = notwendige Bedingung, (★ + ◆) = hinreichende Bedingung.

10.3 Ableitungen und Stammfunktionen:



$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad [n \neq -1]$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x $	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
e^x	e^x	e^x
$x \cdot (\ln x - 1)$	$\ln x $	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\frac{x}{\ln(a)} \cdot (\ln x - 1)$	$\log_a x $	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
Beachte: Variable x in Bogenmass! Trigonometrische Funktionen siehe S. 19, 20.		
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln(\cos(x))$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$

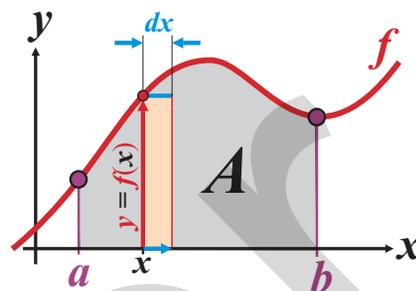
11 Integralrechnung

Definition: $F(x)$ heisst **Stammfunktion** von $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. Zwei verschiedene Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich um höchstens eine additive Konstante: $F_2(x) = F_1(x) + C$. Die Konstante C heisst **Integrationskonstante**.

- **Unbestimmtes Integral = Menge aller Stammfunktionen:** $\int f(x) dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$

- **Bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**

$$A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$



$|A|$: Fläche unter f zwischen den Integrationsgrenzen $x = a$ und $x = b$, wenn f zwischen a und b keine Nullstellen hat.

11.1 Integrationsregeln

- ▶ **Konstantenregel:**

$$\int_a^b (c \cdot f(x)) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

- ▶ **Summenregel:**

$$\int_a^b (u(x) \pm v(x)) dx = \int_a^b u(x) dx \pm \int_a^b v(x) dx$$

- ▶ **Orientierung des Integrals:**

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

- ▶ **Änderung der Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- ▶ **„Vorzeichen“ der Fläche:**

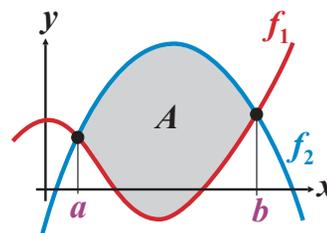
$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \text{ für } x \in [a, b] \\ f(x) \leq 0 \text{ für } x \in [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \end{array} \right.$$

- ▶ **Fläche zwischen f_1 und f_2 :**

$$A = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx$$

- ▶ **Partielle Integration:**

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$



- ▶ **Substitutionsregel:** Es sei $f(x) = u(v(x))$ eine verkettete Funktion. $U(v)$ bezeichne eine

Stammfunktion der äusseren Funktion. Dann: $\int_a^b u(v(x)) \cdot v'(x) dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(v) dv = [U(v)]_{v(a)}^{v(b)}$

11.2 Rotationsvolumen und Bogenlänge

- Drehung um x -Achse: $V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Verallgemeinerung siehe S. 13.

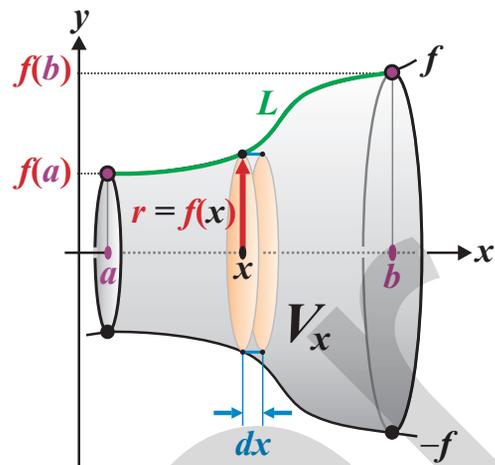
- Drehung um y -Achse: $V_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} (\bar{f}(y))^2 dy$

$y = f(x)$ streng monoton.

$x = \bar{f}(y)$ ist die Umkehrfunktion von $y = f(x)$

\Rightarrow Umkehrfunktion siehe S. 14.

- Bogenlänge: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$



11.3 Potenzreihen, Taylor-Polynome

- Taylorpolynom $T_n(x)$: Approximation einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 durch eine ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) n -ten Grades:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k, \text{ wobei } f^{(k)}(x) \text{ f\u00fcr die } k\text{-te Ableitung steht. Ausf\u00fchrlich:}$$

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Fehler (Restglied): $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \alpha(x-x_0)), \quad 0 < \alpha < 1.$

- Potenzreihenentwicklungen:

Term	Potenzreihenentwicklung	G\u00fcltig f\u00fcr
$(1+x)^n$	$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots$	$n \in \mathbb{N}; x < 1$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots$	$ x < 1$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \dots$	$ x < 1$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \mp \dots$	$0 < x \leq 2$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \pm \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$

12 Vektorgeometrie

Definition: Ein **Vektor** \vec{r}_A beschreibt eine **Translation (Verschiebung)**. Vektoren haben eine Länge (Betrag) und eine Orientierung (Richtung). Vektoren dürfen beliebig parallel verschoben werden, haben also keinen fix vorgegebenen Anfangspunkt.

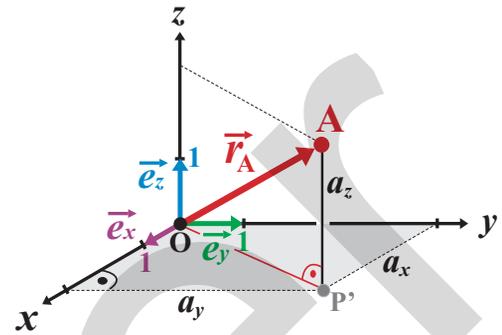
► **Einheitsvektoren:**

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

► **Linearkombination:** Jeder dreidimensionale Vektor \vec{r}_A lässt sich als Linearkombination von $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$$\text{schreiben: } \vec{r}_A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z.$$

a_x, a_y, a_z heissen Komponenten von \vec{r}_A .



► **Ortsvektor** von $A(a_x, a_y, a_z)$: $\vec{r}_A = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Vektor vom Ursprung} \\ \text{zum Punkt A.} \end{array} \right.$

► **Betrag, Länge:**

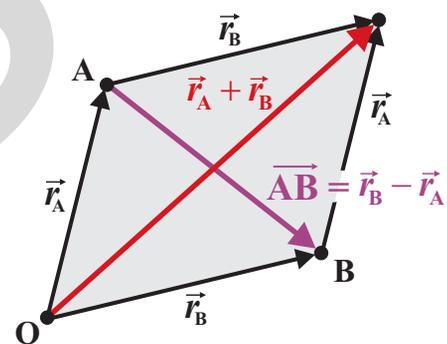
$$|\vec{r}_A| = r_A = \overline{OA} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

► **Addition, Subtraktion:**

$$\vec{r}_A \pm \vec{r}_B = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Differenzvektor: Ortsvektor des Endpunktes **Minus** Ortsvektor des Anfangspunktes.

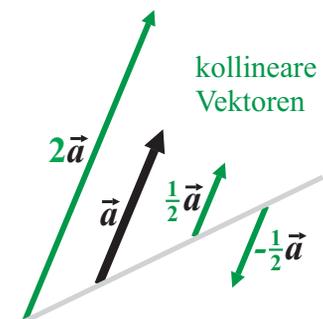
Addition, Subtraktion von Vektoren:



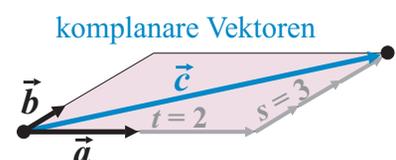
► **Multiplikation mit Skalaren (= Zahlen)**

Kollineare Vektoren \vec{a} und \vec{b} :

$$\vec{b} = k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \\ k \cdot a_z \end{pmatrix}$$

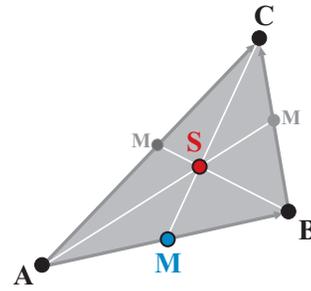


Komplanare Vektoren: \vec{c} ist komplanar zu \vec{a} und \vec{b} wenn \vec{c} eine Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} ist, also wenn es $t, s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ gilt.



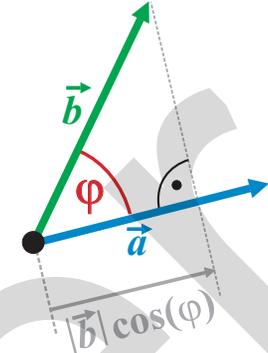
► **Mittelpunkt** von A und B: $\vec{r}_M = \frac{1}{2} \cdot (\vec{r}_A + \vec{r}_B)$

► **Schwerpunkt** $\triangle ABC$: $\vec{r}_S = \frac{1}{3} \cdot (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$
(siehe auch S. 7)



► **Skalarprodukt**: Senkrechte Projektion von \vec{b} auf \vec{a}

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$



► **Winkel φ** zwischen \vec{a} und \vec{b} : $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

► **Senkrechtbedingung**: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ falls $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

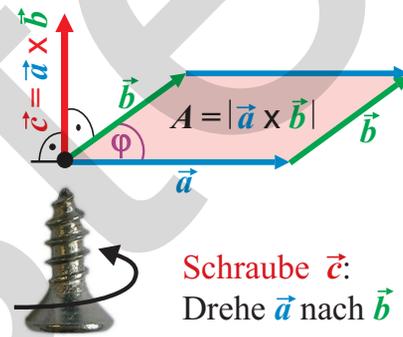
► **Vektorprodukt**:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

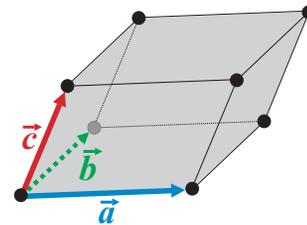
$|\vec{c}|$: Fläche des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.



► **Spatprodukt**:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$$

V : Volumen des von \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Spates.

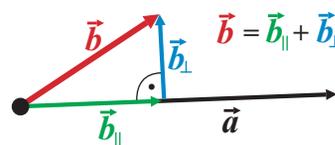


► **Einheitsvektor in Richtung von \vec{a}** : $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

► **Zerlegung von \vec{b} in vektorielle Komponenten**
Parallel und Senkrecht zu \vec{a} :

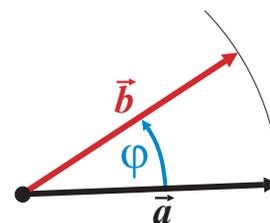
$$\vec{b}_{\parallel} = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$



► **Drehung eines zweidimensionalen Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$** :

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi) \\ x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$



12.1 Geraden (siehe auch S. 16)

► **Punkt-Steigungsform (Normalform):** siehe S. 16.

► **Koordinatenform:** $g: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

- **Normalenvektor:** $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp g$
- **Parallel:** $g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$
- **Senkrecht:** $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
- **Schnittwinkel φ zwischen g_1 und g_2 :**

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

- **Abstand Punkt $P(x_P / y_P)$ zu g :**

$$d(P, g) = \frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

► **Parameterform:** $g: t \mapsto \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{v}$

- **Einzige Geradengleichung im Raum!**
- **Richtungsvektor:** \vec{v} = beliebiger Vektor in Richtung von g .
- **Aufpunkt:** Beliebiger Punkt A (mit Ortsvektor \vec{r}_A) auf g .
- **Parallel:** $g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 = k \cdot \vec{v}_2$
- **Senkrecht:** $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$
- **Schnittwinkel zwischen g_1 und g_2 :**

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$

- **Spurpunkte S_x, S_y, S_z :** Schnittpunkte von g mit einer der Grundebenen.

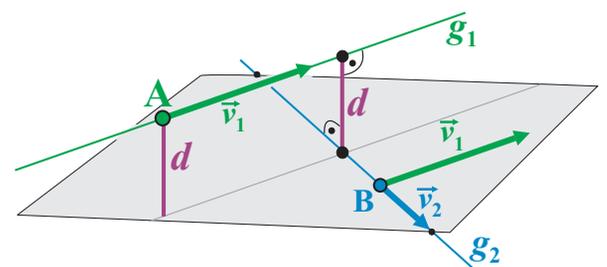
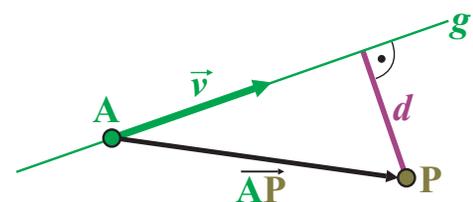
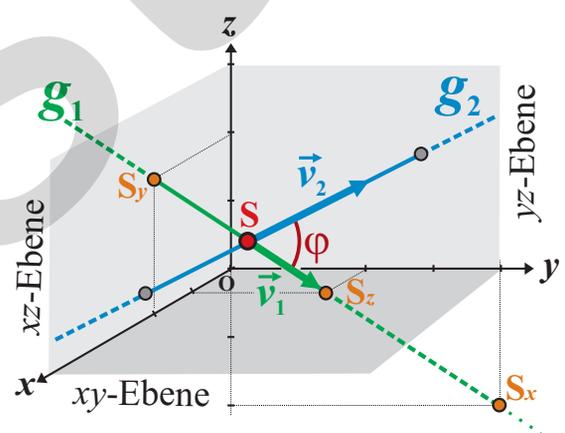
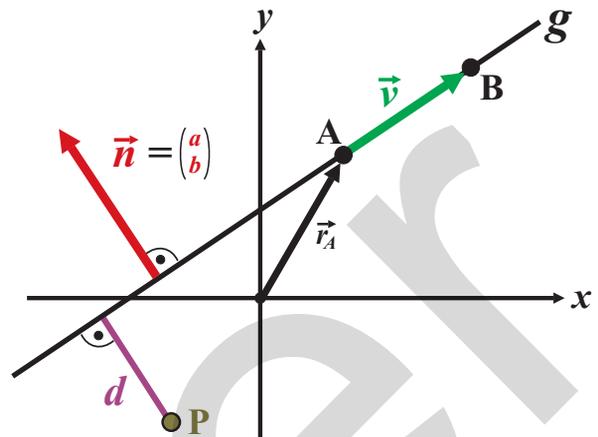
► **Abstand Punkt P zur Geraden $g: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{v}$**

im Raum: $d(P, g) = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|}$

► **Abstand zweier windschiefer Geraden**

$$g_1: \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{v}_1 \text{ und } g_2: \vec{r} = \vec{r}_B + \tilde{t} \cdot \vec{v}_2$$

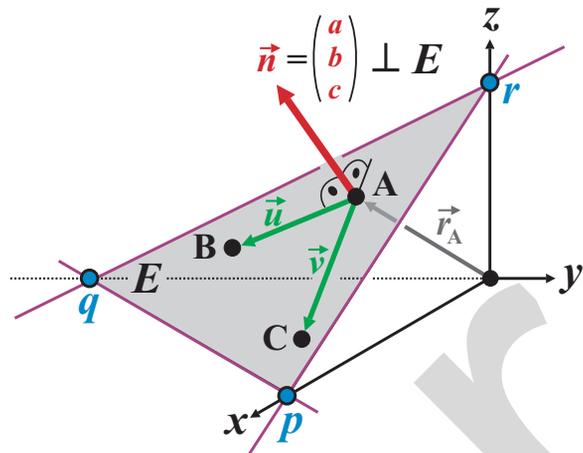
im Raum: $d(g_1, g_2) = \frac{|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$



12.2 Ebenen

► **Parameterform:** $E : \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

- Falls **3 Punkte** A, B, C oder **Punkt A** und **zwei verschiedene Richtungen** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ gegeben sind.
- Jedem Zahlenpaar (t, s) entspricht genau ein Punkt P (Ortsvektor \vec{r}) auf E.



► **Achsenabschnittsform:** $E : \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ $\begin{cases} p, q, r \neq 0 \\ p, q, r = \infty \text{ ist zugelassen.} \end{cases}$

► **Normalform:** $E : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0$

► **Koordinatenform:** $E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

- **Normalenvektor:**

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{u} \times \vec{v} \perp E$$

- $E_1 \parallel E_2 \iff \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$

- $E_1 \perp E_2 \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

- **Winkel φ zwischen E_1 und E_2 :**

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad 0 \leq \varphi \leq 90^\circ$$

- **Winkel α zwischen E und g :**

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} \quad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ$$

- **Hessesche Normalform:**

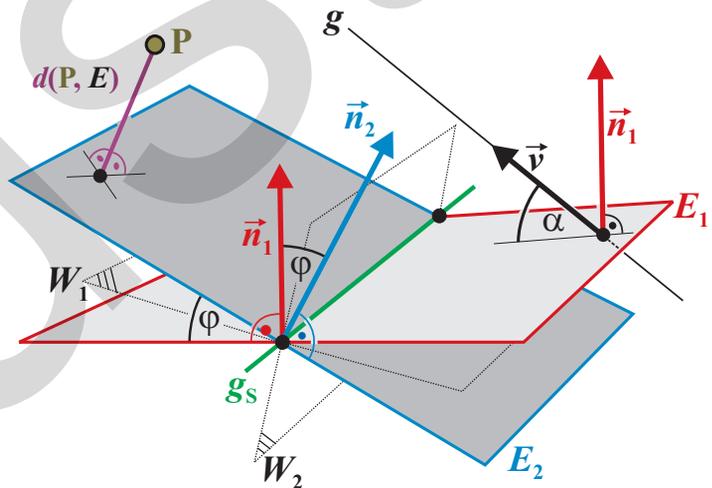
$$H(x, y, z) = \frac{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

- **Abstand $P(x_P / y_P / z_P)$ zu E :**

$$d(P, E) = \frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **Winkelhalbierende Ebenen:**

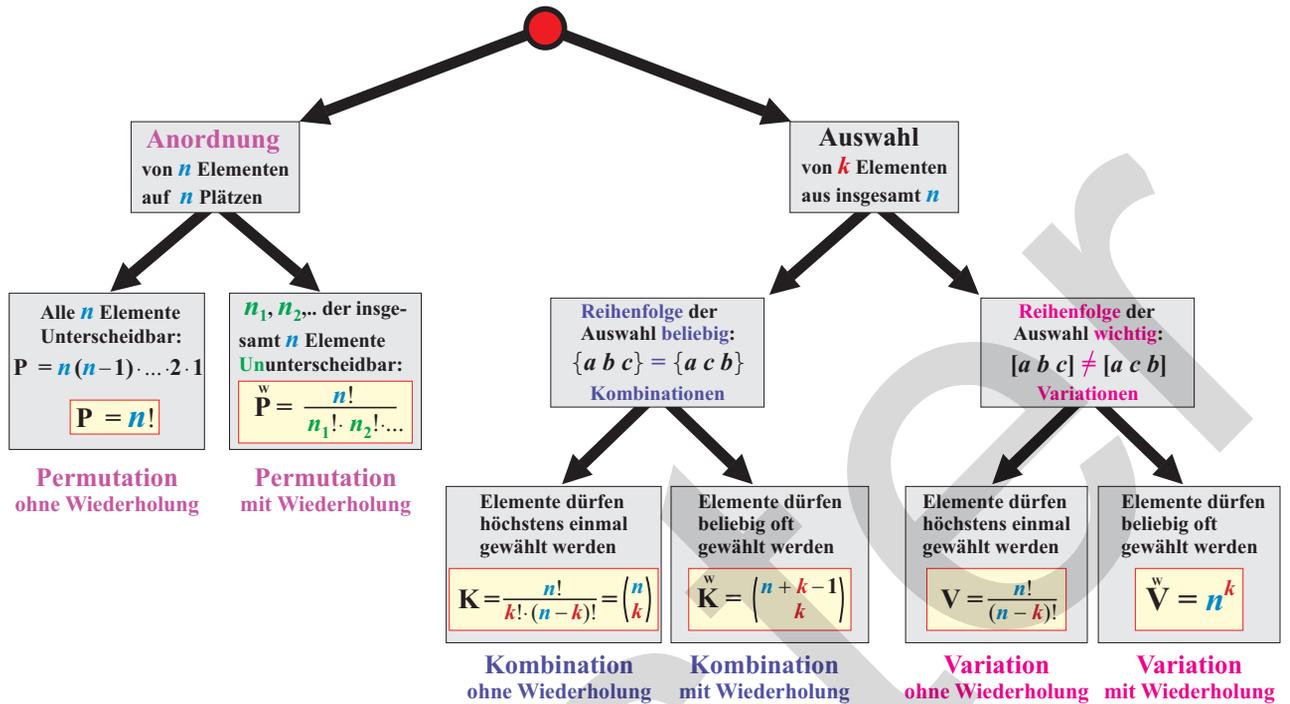
$$W_{1,2} : H_1(x, y, z) = \pm H_2(x, y, z)$$



13 Stochastik

13.1 Kombinatorik

Start: Kriterien, welche für **eine** Stichprobe gelten.



Fakultät: $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ $0! = 1$ Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
 $1! = 1$

Symmetrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Rekursion: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

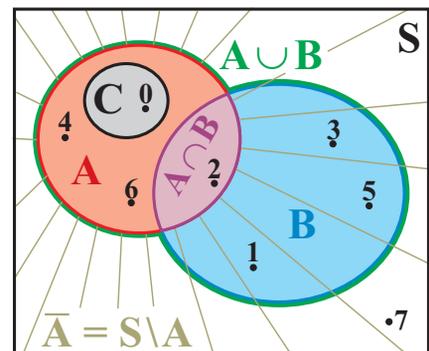
13.2 Wahrscheinlichkeit, Mengenlehre

► Stichprobenraum **S**: Menge aller möglichen Ereignisse (Grundmenge).

► Ereignisse **A, B, C**: Teilmengen von **S**.

Bsp.: $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$, $4 \in A$; $3 \notin A$.

$ A $	Mächtigkeit	Anzahl Elemente in A
$A \cap B$	Schnittmenge	A und B
$A \cup B$	Vereinigung	A oder B
$\bar{A} = S \setminus A$	Komplement	S ohne A
$C \subset A$	Teilmenge	C enthalten in A
$\{\}, \emptyset$	Leere Menge	



► Laplace-Wahrscheinlichkeit: Alle Elemente in **S** treten gleichwahrscheinlich auf. Dann:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{Anzahl Elemente in A}}{\text{Anzahl Elemente in S}} = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}}$$

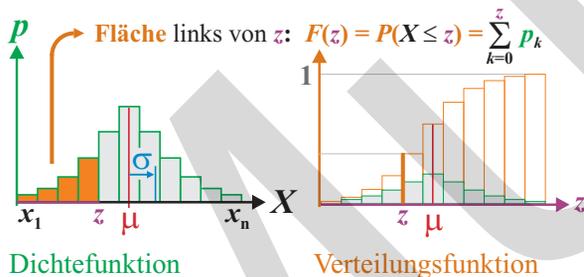
Unmögliches Ereignis $p(\emptyset) = 0$ Sicheres Ereignis $p(S) = 1$	$0 \leq p(A) \leq 1$
Gegenwahrscheinlichkeit	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ (Mengendiagramm siehe S. 36.)
Additionssatz	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$p(B A)$: Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist: „ A = Wenn, B = Dann“ Ereignis. $p(B A) = \frac{ A \cap B }{ A } = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ (Verkleinerung des Stichprobenraumes von S auf A)
Multiplikationssatz	$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B A)$
Unabhängige Ereignisse	Die Ereignisse A und B sind unabhängig , falls $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ gilt.

⇒ Binomialverteilung (Bernoulli) siehe S. 38.

13.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

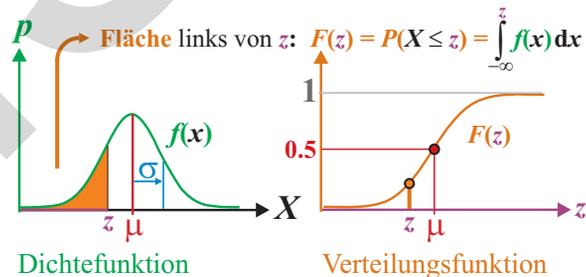
Diskrete Verteilung:

Zufallsvariable X nimmt ausschliesslich die n Werte x_1, x_2, \dots, x_n mit den **Wahrscheinlichkeiten** (relative Häufigkeiten, Gewichtungsfaktoren) p_1, p_2, \dots, p_n an.



Kontinuierliche Verteilung:

Zufallsvariable X nimmt beliebige Werte $x \in \mathbb{R}$ an. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau x eintritt, heisst **Dichtefunktion** $f(x)$.
Anmerkung: Streng genommen, ist die Dichtefunktion stetiger Verteilungen überall Null.



$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{k=1}^n p_k = 1$$

Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$E(X) = \mu = \sum_{k=1}^n p_k \cdot x_k$$

Mittelwert (Erwartungswert)

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx$$

$$\text{var}(X) = \sigma^2 = \sum_{k=1}^n p_k \cdot (x_k - \mu)^2$$

Varianz

$$\text{var}(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2 dx$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Seien X, Y zwei Zufallsvariablen und a, b Konstanten. Dann gilt:

$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

$$\text{var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \text{var}(X)$$

13.4 Binomialverteilung, Bernoulli (diskrete Verteilung)

Stichprobenraum besteht aus genau zwei Elementen: $S = \{A, \bar{A}\}$ mit den gleichbleibenden Wahrscheinlichkeiten $p(A) = p$ und $p(\bar{A}) = 1 - p$. Das Ereignis A trete bei genau n Wiederholungen X mal ein. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass...

A mindestens einmal eintritt:	$P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$
A genau k mal eintritt:	$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$
A höchstens x mal eintritt:	$P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad 0 \leq x \leq n$
Erwartungswert:	$E(X) = n \cdot p$
Standardabweichung:	$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Für $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ kann eine Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden.

13.5 Normalverteilung (kontinuierliche Verteilung)

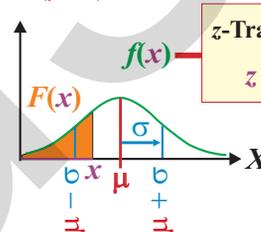
- Dichtefunktion:**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

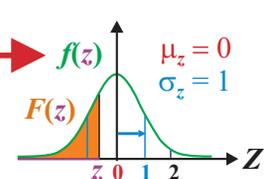
Standard-Normalverteilung:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \mathcal{N}(0, 1)$$

Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$



Standard-Normal-Verteilung $\mathcal{N}(0, 1)$



z-Transformation
 $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Symmetrie:

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

$$f(-z) = f(+z)$$

$$F(-z) = 1 - F(+z)$$

- Verteilungsfunktion:**

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

W'keit, dass *höchstens* x eintritt.

Standard-Normalverteilung:

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

⇒ Siehe Tabelle im inneren hinteren Umschlag.

- σ -Umgebungen bei Normalverteilung:**

1 σ -Umgebung	2 σ -Umgebung	3 σ -Umgebung
$p(\mu - x < 1\sigma) \approx 68.3\%$	$p(\mu - x < 2\sigma) \approx 95.4\%$	$p(\mu - x < 3\sigma) \approx 99.7\%$

13.6 Statistik: Daten mit einer Variablen

Seien $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ die Werte einer Stichprobe und n_1, n_2, \dots, n_k deren **absolute Häufigkeiten**. Für den Umfang der Stichprobe gilt $n = \sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Die **relative Häufigkeit** ist durch $p(x_i) = \frac{n_i}{n}$ definiert. Insbesondere gilt $\sum_{i=1}^k p(x_i) = 1$.

	Einzeldaten	Gruppendaten (Klassen)
Daten	n Werte x_1, x_2, \dots, x_n	k Werte x_1, x_2, \dots, x_k der absolute Häufigkeit n_1, n_2, \dots, n_k
Arithmetischer Mittelwert	$\bar{x} = E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\bar{x} = E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \sum_{i=1}^k p(x_i) x_i$
Median	Der Median $x_{0.5}$ der Werte einer geordneten Stichprobe ist... <ul style="list-style-type: none"> • der in der Mitte liegende Wert, falls n ungerade. • Der Mittelwert beider mittleren Werte, falls n gerade. 	
Modalwert (Modus)	Der Modalwert x_M ist der am häufigsten auftretende Messwert.	
Spannweite	$R = x_{\max} - x_{\min}$	
Varianz*	$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2$ oder $s_x^2 = \sum_{i=1}^k p(x_i) (x_i - \bar{x})^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

[*] Wenn die Werte x_1, x_2, \dots, x_n eine Population darstellen oder wenn die Varianz innerhalb der Stichprobe gesucht ist, ersetze man den Nenner $n - 1$ durch n .

Standardabweichung: $s_x = \sqrt{s_x^2}$

Um Stichproben zu vergleichen, dient der **Variationskoeffizient** $V = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\%$

Box plot: Ermittle den **Median** $x_{0.5}$, das obere ($x_{0.75}$) und das untere ($x_{0.25}$) Quartil, die kleinste (x_{\min}) und die grösste (x_{\max}) Stichprobe. Dann



Ungleichung von Tschebyshev:

Für eine Stichprobe mit Mittelwert \bar{x} und Varianz s_x^2 gilt für die Wahrscheinlichkeit p dass ein Messwert x **innerhalb** einer $\pm\lambda$ -Umgebung um den **Mittelwert** liegt: $p(|x - \bar{x}| < \lambda) \geq 1 - \frac{s_x^2}{\lambda^2}$

13.7 Daten mit zwei Variablen: Regression und Korrelation

Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ n Paare von **Messwerten**. Die Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen X und Y kann durch eine von Parametern a, b, \dots abhängigen **Modellfunktion** $y = f(x)$ beschrieben werden. Die Parameter a, b, \dots von f werden so gewählt, dass das mittlere Quadrat der Abweichungen von $y_i - f(x_i)$ minimal wird (Straffunktion):

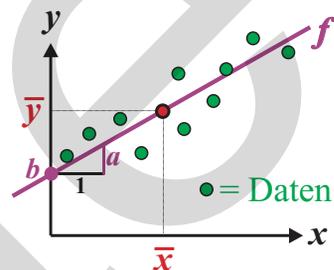
$$S(X, Y, a, b, \dots) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \text{minimal}$$

Lineare Regression:

Modellfunktion: $y = f(x) = a \cdot x + b$ mit

• Steigung:
$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{c_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

• y-Achsenabschnitt: $b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$



Korrelationskoeffizient:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{c_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Kovarianz:

$$c_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

$$c_{xy} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

r_{xy} beschreibt die Stärke der Korrelation zwischen x und y :

Korrelationskoeffizient r_{xy}			
maximal	stark	mittel	schwach bis keine
$ r_{xy} = 1$	$1 > r_{xy} \geq 0.7$	$0.7 > r_{xy} \geq 0.3$	$0.3 > r_{xy} \geq 0$

Alternative: Gleichungssystem zur Berechnung von a und b der Regressionsgeraden:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

14 Mathematische Symbole

$A \Rightarrow B$	Folgerung: Aus A folgt B .
$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz: A ist äquivalent (gleichwertig) zu B .
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	Zahlenmengen (siehe S. 2).
\mathbb{D}, \mathbb{W}	Definitionsmenge, Wertemenge (siehe S. 14).
$f : x \mapsto y = f(x)$	y [abhängige Var.] ist Funktion von x [unabhängige Var.]
$A = \{a, b, c\}$	Die Menge A der Elemente a, b, c .
$[a, b]$	Das Intervall zwischen (und mit) a und b .
(a, b)	Das Intervall zwischen (aber ohne) a und b . Beispiel: $(2, 5] =$ Menge aller x , so dass $2 < x \leq 5$ gilt.
$5 \in \mathbb{N}$	Element: Die Zahl 5 liegt in der Menge \mathbb{N} ; (5 ist natürliche Zahl).
$1.5 \notin \mathbb{N}$	Nicht Element: Die Zahl 1.5 liegt nicht in der Menge \mathbb{N} .
$P \in f$	Der Punkt P liegt auf dem Graphen der Funktion f .
$A \subset B$	Enthalten in: Die Menge A ist enthalten in B .
$g \subset E$	Die Gerade g (=Punktemenge) liegt auf der Ebene E .
$A \cap B$	A Geschnitten mit B : Elemente, welche in A und in B liegen.
$g \cap E$	Gerade g geschnitten mit E
$A \cup B$	A Vereinigt mit B : Elemente, welche in A oder in B liegen.
$A \setminus B$	A Ohne B : Elemente, welche in A aber nicht in B liegen.
	Bedingung (Wenn). Beispiele: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} =$ Menge aller reellen x , welche kleiner als 1 sind. $p(B \mid A) =$ W'keit, dass B eintritt, wenn A bereits eingetreten ist.
\forall	Für alle: Beispiel: $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt...
\exists	Es gibt: Beispiel: $\exists x \in \mathbb{R} :$ es gibt eine reelle Zahl x ...

Das griechische Alphabet

A	α	Alpha	H	η	Eta	N	ν	Nü	T	τ	Tau
B	β	Beta	Θ	θ, ϑ	Theta	Ξ	ξ	Xi	Y	υ	Ypsilon
Γ	γ	Gamma	I	ι	Iota	O	o	Omicron	Φ	ϕ, φ	Phi
Δ	δ	Delta	K	κ	Kappa	Π	π	Pi	X	χ	Chi
E	ϵ, ε	Epsilon	Λ	λ	Lambda	P	ρ	Rho	Ψ	ψ	Psi
Z	ζ	Zeta	M	μ	Mü	Σ	σ, ς	Sigma	Ω	ω	Omega

Index

- A**bleitung, 28, 29
- Abstand, 34, 35
- Achsenabschnittsform (g, E) , 16, 35
- Addition, Subtraktion, 2, 3
- Additionstheoreme trig. Funktionen, 20
- Ähnlichkeit, Strahlensätze, 6
- Algebra, 3, 4
- Annuität (Finanz), 27
- Äquivalenzumformungen, 3
- Argument (\mathbb{C}) , 2
- Arithmetische Folgen und Reihen, 24
- Assoziativgesetz, 3
- Asymptote, Polgeraden, 17
- Ausmultiplizieren, 3

- B**arwert (Finanz), 27
- Basis, Basiswechsel, 5, 18
- Bedingte Wahrscheinlichkeit, 37
- Bestimmtes Integral, 30
- Betrag, 2, 15, 32
- Binomialkoeffizienten, 4, 36, 38
- Binomialverteilung, 38
- Binomische Formeln, -Satz, 4
- Bogenlänge, 9, 31
- Bogenmass, 19
- Box-Plot, 39
- Bruchrechnen, 4

- C**avalieri, Prinzip von, 11
- Cosinus, 6, 19
- Cosinussatz, 6

- D**efinitionsbereich, 14
- Determinante, 23
- Dichtefunktion, 37, 38
- Differentialrechnung, 28
- Differenzenvektor, 32
- Diskriminante, 21
- Distributivgesetz, 3
- Divergenz, 25
- Division, Multiplikation, 2, 3
- Dodekaeder, 12, 13
- Doppelbrüche, 4
- Drachenviereck, 8
- Dreieck, rechtwinkliges, 6, 19

- E**igenwerte und Eigenvektoren, 23
- Einheitskreis, 19
- Einheitsmatrizen, 22
- Einheitsvektoren, 22, 32
- Elastizität (Finanz), 27
- Ellipse (Kegelschnitt), 10
- Ellipsoid, 13
- Endwert (Finanz), 27
- Epsilon-Umgebung, 25
- Ereignis, 36
- Erste Ableitung, 28
- Erwartungswert, 37, 38
- Euklid, Satz von, 6
- Eulersche Formel (\mathbb{C}) , 2
- Eulersche Zahl, 18
- Explizite Darstellung, 24
- Exponent, 5
- Exponentialfunktionen, 18
- Extrema, 28, 29

- F**aktorisieren, 3
- Fakultät, 36
- Finanzmathematik, 27
- Fläche unter Funktionen, 30
- Flächeninhalt, 6, 7, 9–11
- Folgen und Reihen, 24
- Funktionen, 14, 16–20

- G**anze Zahlen, 2
- Ganzrationale Funktionen, 16
- Gausscher Algorithmus (Matrix), 23
- Gaussche Zahlenebene (\mathbb{C}) , 2
- Gebrochen-rationale Funktionen, 17
- Gegenwahrscheinlichkeit, 37
- Geometrische Folgen und Reihen, 24
- Geraden, 16, 34
- Gleichschenklige, gleichseitige Dreiecke, 7
- Gleichungen, 3, 21
- Goldener Schnitt, 26
- Gradmass, 19
- Grenzfunktion (Finanz), 27
- Grenzwerte, 25

- H**öhe, 6, 7, 11
- Höhensatz, 6
- Hôpital, Regel von, 25
- Harmonische Reihe, 24
- Harmonische Teilung, 26
- Hauptsatz Diff / Int, 30
- Hessesche Normalform, 35
- Hochpunkt, 28, 29

Hyperbel (Kegelschnitt), 10
Hyperbelfunktionen, 15

Ikosaeder, 12, 13
Imaginäre Einheit (\mathbb{C}), 2
Inkreisradius, 7, 8
Inkugelradius, 13
Integralrechnung, 30
Inverse Funktion, 14
Inverse Matrix, 23
Inverse, Kehrwert, 2, 3
Irrationale Zahlen, 2

Kapital (Finanz), 27
Kathetensatz, 6
Kegel, 11
Kegelschnitte, 10
Kehrwert, Inverse, 2–4
Kettenregel, 28
Klammerregeln, 3
Kollineare, komplanare Vektoren, 32
Kombinatorik, 36
Kommutativgesetz, 3
Komplanare Vektoren, 32
Komplement, 36
Komplexe Zahlen, Konjugierte (\mathbb{C}), 2
Konstantenregel (diff / int), 28, 30
Konvergenz, 25
Koordinatenform (g, E) , 34, 35
Korrelation, Kovarianz, 40
Kreis: Teile und Gleichung, 9
Kreiswinkelsätze, 9
Kugel: Teile und Gleichung, 12

Leere Menge, 36
Lineare Funktionen, 16
Lineare Gleichungssysteme, 22
Lineare Regression, 40
Linearkombination, 32
Logarithmus: Sätze und Funktionen, 5, 18

Mantelfläche, 11
Matrizen, 22
Maximum, Minimum, 28, 29
Median, 39
Mengenlehre, 36
Mittelpunkt, 9, 10, 12, 33
Mittelsenkrechte (Dreieck), 7
Mittelwerte, 26, 39
Multiplikation, Division, 2, 3

Natürliche Zahlen, 2

Nennergrad, 17
Newtonsches Nullstellenverfahren, 21
Normalenvektor, 33, 35
Normalform (g, E) , 16, 35
Normalverteilung, 38
Nullstelle, 21, 29

Oberfläche, 11–13
Öffnungswinkel, 11
Oktaeder, 12, 13
Orthogonale Matrix, 23
Ortsvektor, 32

Parabel, 10, 16, 17
Paraboloid, 13
Parallel (g, E) , 16, 34, 35
Parallelogramm, 8, 33
Parameterform (g, E) , 34, 35
Partielle Integration, 30
Pascalsches Zahlendreieck, 4
Periode, 19
Permutation, 36
Platonische Körper, 12, 13
Polgeraden, Asymptote, 17
Polyeder, 12, 13
Polynomdivision, 17, 21
Polynomfunktion, 16
Potenzfunktionen, 15
Potenzieren, 2, 3
Potenzreihen, 31
Potenzsätze, 5
Prinzip von Cavalieri, 11
Prisma, 11
Produktregel (diff), 28
Punktsymmetrie, 15
Pyramiden, 11
Pythagoras, Satz von, 6

Quader, 11
Quadrat, 8
Quadratische Gleichungen, 21
Quadratwurzel, 5, 15
Quotientenregel (diff), 28

Radius, 7, 9, 12
Radizieren, 2, 3
Rang einer Matrix, 23
Rationale Zahlen, 2
Raute, 8
Rechteck, 8
Rechtwinkliges Dreieck, 6, 19

Reelle Zahlen, 2
 Regel von de l'Hôpital, 25
 Regression, 40
 Rekursive Darstellung, 24
 Rente, Rentenrechnung, 27
 Richtungsvektor (g, E) , 34, 35
 Rotation (Vektor), 14, 23, 33
 Rotationsvolumen, 13, 31

Sattelpunkt, 28, 29
 Scheitelpunkt, 17
 Schicht, Zone (Kugel), 12
 Schnittmenge, 36
 Schnittwinkel (g, E) , 16, 34, 35
 Schwerpunkt (Dreieck), 7, 33
 Segment, 9, 12
 Sehnen- und Sekantensatz, 9
 Sehnentangentenwinkel, 9
 Sehnenviereck, 8
 Seitenhalbierende (Dreieck), 7
 Sekante, 9, 28
 Sektor, 9, 12
 Senkrecht (g, E) , 16, 33–35
 Sinus, 6, 19
 Sinussatz, 6
 Skalar, 32
 Skalarprodukt, Spatprodukt, 33
 Spiegelsymmetrie, 15
 Spitze Körper, 11
 Spurpunkte, 34
 Stammfunktion, 29, 30
 Standardabweichung, 37–39
 Statistik, 39, 40
 Steigung, 16, 28, 40
 Stichprobenraum, 36
 Strahlensätze, Ähnlichkeit, 6
 Substitutionsregel (int), 30
 Subtraktion, Addition, 2, 3
 Summenregel (diff / int), 28, 30
 Symmetrie, 15

Tangens, 6, 19
 Tangente (Kreis, Kegelschnitt), 9, 10
 Tangentensteigung (Funktion), 28
 Tangentenviereck, 8
 Tangentialebene an Kugel, 12
 Taylor-Polynome, 31
 Teilmenge, 36
 Termumformungen, 4
 Terrassenpunkt, 28, 29
 Tetraeder, 12, 13

 Thaleskreis, 9
 Tiefpunkt, 28, 29
 Torus, 13
 Translation, 14
 Transponierte Matrix, 23
 Trapez, 8
 Trigonometrische Funktionen, 6, 19, 20
 Tschebyschev, Ungleichung, 39

Umfang, 9
 Umkehrfunktion, 14
 Umkreisradius, 7, 8
 Umkugelradius, 13
 Unbestimmtes Integral, 30
 Unendliche geometrische Reihe, 24
 Ungleichung, 3

Varianz, 37–39
 Variation (Kombinatorik), 36
 Vektorgeometrie, Vektorprodukt, 32, 33
 Vereinigungsmenge, 36
 Verteilungen, 37
 Verteilungsfunktion, 37, 38
 Vertikale Asymptoten, 17
 Vierecke, 8
 Vieta, Satz von, 21
 Vollständige Induktion, 26
 Volumen, 11–13, 31

Würfel, 11–13
 Wachstumsrate (Finanz), 27
 Wahrscheinlichkeit, 36
 Wendepunkt, 28, 29
 Wertebereich, 14
 Winkel, 2, 6, 7
 Winkel (g, E) , 16, 34, 35
 Winkel (Vektoren), 33
 Winkelhalbierende (Dreieck), 7
 Winkelhalbierende Ebenen, 35
 Wurzel, 5
 Wurzelfunktionen, 15

Z-Transformation, 38
 Zählergrad, 17
 Zahlenfolge, 24
 Zentriwinkel (Kreis), 9
 Zinsrechnung, 27
 Zone (Kugel), 12
 Zufallsvariable, 37
 Zylinder, 11