2 Zahlenmengen

Am Anfang waren die **natürlichen Zahlen**

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, \ldots\} \quad \text{beziehungsweise mit der Null} \quad \mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$$

Diese ,,ursprüngliche" Zahlenmenge ist **abgeschlossen** bezüglich der **Addition** und der **Multiplikation**, was soviel bedeutet, als dass man einzig durch Addition oder Multiplikation von natürlichen Zahlen stets wieder eine natürliche Zahl als Ergebnis erhält:

$$a,\ b\ \in\ \mathbb{N}\ \Rightarrow\ (a+b)\ \in\ \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad a,\ b\ \in\ \mathbb{N}\ \Rightarrow\ (a\cdot b)\ \in\ \mathbb{N}$$

Wer ausschliesslich addiert oder multipliziert, wird sich mit der Menge der natürlichen Zahlen zufrieden geben können, da diese damit nicht verlassen wird. Was aber, wenn wir beginnen zu subtrahieren: Dann ist nebst $5-3=2$ auch $3-5=-2$ denkbar, und bereits haben wir die natürlichen Zahlen verlassen. Bei der Subtraktion besteht somit Bedarf, die Zahlenmenge $\mathbb{N}$ um die negativen Zahlen zu den **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ zu erweitern:

$$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3, \ldots\}$$

Es dürfte naheliegend sein, dass $\mathbb{Z}$ auch bezüglich der Subtraktion abgeschlossen ist:

$$a,\ b\ \in\ \mathbb{Z}\ \Rightarrow\ (a-b)\ \in\ \mathbb{Z}$$

Das ist noch nicht alles, schliesslich möchten wir auch in der Lage sein zu dividieren, beispielsweise um einen Geburtstagskuchen in Stücke zu teilen. Es ist verständlich, dass uns dazu die ganzen Zahlen nicht ausreichen, denn aus $a,\ b\ \in\ \mathbb{Z}$ folgt *nicht*, dass auch $\frac{a}{b}\ \in\ \mathbb{Z}$ gilt. Die Division erfordert eine Erweiterung der ganzen Zahlen auf die Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$, also der Menge aller Brüche:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}\ \middle|\ a, b\ \in\ \mathbb{Z},\quad b \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Menge aller } \textbf{abbrechenden} \text{ oder} \\ \textbf{periodischen Dezimalzahlen} \end{array} \right\}$$

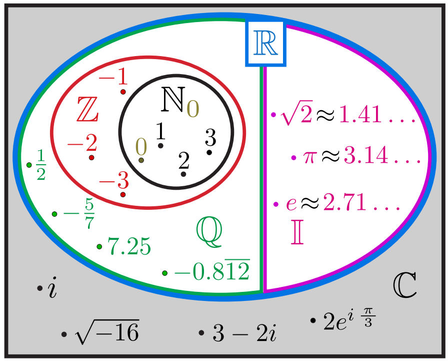
Beispielsweise ist $0.3 = \frac{3}{10}\ \in\ \mathbb{Q}$ oder $-2.7 = \frac{-27}{10}\ \in\ \mathbb{Q}$. Weniger offensichtlich sieht es mit den periodischen Dezimalentwicklungen aus: $0.\overline{3}\ldots = \frac{1}{3}\ \in\ \mathbb{Q}$. Die Umwandlung eines Bruches in eine Dezimalzahl erfolgt durch schriftliche Division, umgekehrt lässt sich jede abbrechende oder periodische Dezimalzahl als Bruch darstellen, siehe S. 7.
$\mathbb{Q}$ ist die kleinste Zahlenmenge, welche bezüglich den vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division abgeschlossen ist:

$$p,\ q\ \in\ \mathbb{Q}\ \Rightarrow\ \left\{ \begin{array}{l} (p+q)\ \in\ \mathbb{Q} \\ (p-q)\ \in\ \mathbb{Q} \end{array} \right. \quad \text{sowie} \quad p,\ q\ \in\ \mathbb{Q}\ \Rightarrow\ \left\{ \begin{array}{l} (p\cdot q)\ \in\ \mathbb{Q} \\ \ (\frac{p}{q})\ \ \in\ \mathbb{Q},\ q\neq 0 \end{array} \right.$$

Wieso ist das von Interesse? Unter anderem geht es darum, herauszufinden, in welcher Zahlenmenge die Lösung einer bestimmten Gleichung liegt. In der Praxis ist diese Information etwa beim Programmieren von grosser Bedeutung.

Aus den bisherigen Beschreibungen folgt beispielsweise, dass eine lineare Gleichung $a\,x + b = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten $a,\ b\ \in\ \mathbb{Z},\ \ a \neq 0$ immer genau eine rationale Lösung $x = -\frac{b}{a}\ \in\ \mathbb{Q}$ besitzt. Anders sieht es mit quadratischen Gleichungen aus: So hat die Gleichung $x^2 = 2$ *keine* rationalen Lösungen, weil $\sqrt{2} \approx 1.4142...$ eine *nichtperiodische* und *nichtabbrechende* Dezimalentwicklung besitzt und daher *nicht* als Bruch darstellbar ist: $\sqrt{2}\ \notin\ \mathbb{Q}$. Zahlen wie $\sqrt{2} \approx 1.4142...$, $\pi \approx 3.1415...$ und $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718...$ (siehe S. 214) zählen zu den **irrationalen Zahlen** $\mathbb{I}$.

$$\mathbb{I} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Menge aller } \textbf{nichtabbrechenden} \\ \text{und } \textbf{nichtperiodischen} \\ \textbf{Dezimalzahlen} \end{array} \right\}$$



Das Ziehen von Wurzeln verlangt nach der Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$, welche als Vereinigung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$ definiert ist:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q}\ \cup\ \mathbb{I}$$

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden den vollständigen, kontinuierlichen Zahlenstrahl.
Eine letzte Erweiterung der Zahlenmengen auf die Menge der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ ist nur dann erforderlich, wenn das Ziehen von Wurzeln negativer Zahlen erforderlich ist. Die Einführung komplexer Zahlen erfolgt in einem eigenen Abschnitt auf S. 12ff.

Satz: Sei p eine Primzahl. Dann ist $\sqrt{p}$ irrational, also *nicht* als Bruch darstellbar.

Beweis: Wir nehmen das Gegenteil an, also dass es zwei teilerfremde $a,\ b\ \in\ \mathbb{Z}$ gibt, so dass $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ gilt. Ziel ist es, diese Annahme zu einem Widerspruch zu führen ($\Rightarrow$ **Widerspruchsbeweis**).

Dazu folgende Rechnung: $\quad \sqrt{p} = \dfrac{a}{b} \qquad |\ \text{Quadrieren:}$

$$p = \frac{a^2}{b^2} \qquad |\ \cdot b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 \cdot p = a^2 \qquad [\bigstar]$$

Seien $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ und und $b = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m$ die **eindeutigen** Primfaktorzerlegungen (siehe 614) von a bzw. von b. Setzen wir diese in $[\bigstar]$ ein, so erhalten wir:

4.12 Textaufgaben

Bei Textaufgaben liegt die erste Herausforderung darin, einen Text in eine Gleichung oder in ein System von Gleichungen überzuführen. Dazu mag folgendes Schema hilfreich sein:

- **Skizze und Definition der Variablen:** Versuche den beschriebenen Sachverhalt zu skizzieren, analysiere was gegeben ist und lege die exakte Bedeutung der gesuchten Variablen fest. Versuche den Aufgabentext Satz für Satz zu lesen und einzeln zu verstehen. Lies den Aufgabentext genau und mehrmals.
- **Gleichung(en) aufstellen:** Zielführende Fragen:
  - Welche Grössen bleiben gleich (sind konstant)?
  - Welche Grössen sind additiv (addieren sich)?
  - Wie erreiche ich, dass auf beiden Seiten des „=" dasselbe steht?

  Die Anzahl der Gleichungen muss für eine eindeutige Lösung mit der Anzahl Unbekannten übereinstimmen.
- **Gleichung(en) lösen:** Nutze die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden.
- **Antwortsatz:** Formuliere die Antwort als Satz.

Beispiel 29*: Wird eine Zahl um die Hälfte ihres Kehrwerts vergrössert, erhält man das fünffache der Zahl um eins verkleinert. Wie lautet die Zahl?

- **Definition der Variablen:** x sei die gesuchte Zahl. Stückweise lesen:
  - ... ihr Kehrwert: $\frac{1}{x}$, die Hälfte ihres Kehrwerts: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2 \cdot x}$
  - Gesuchte Zahl (x) um die Hälfte ihes Kehwertes $\frac{1}{2 \cdot x}$ vergrössern: $x + \frac{1}{2 \cdot x}$
  - Fünffaches der Zahl $5 \cdot x$, um eine verkleinert: $5 \cdot x - 1$
- **Fragen, welche auf eine Gleichung führen:** „erhält man" steht für das Gleichheitszeichen.
- **Gleichung aufstellen:** $\boxed{x + \frac{1}{2 \cdot x} = 5 \cdot x - 1}$

▶ **Gleichung lösen:** Nach Multiplikation der Gleichung mit $2x$ folgt:

$$2x^2 + 1 = 10x^2 - 2x \quad \Big| \; \text{erkenne quadratische Gleichung: Bringe alles auf eine Seite: } -2x^2 - 1$$

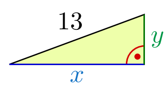
$$0 = 8x^2 - 2x - 1 \quad | \; \text{Mitternachtsformel}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{2 \cdot 8} = \frac{2 \pm 6}{16} = \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

▶ **Antwortsatz:** Die gesuchten Zahlen lautet entweder $\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{4}$.

Beispiel 30*: In einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse 13 cm unterscheiden sich die beiden Katheten um 7 cm. Wie lang sind dessen Katheten?

▶ **Definition der Variablen:** x sei die längere, y die kürzere der Katheten.
Zwei Unbekannte $\Rightarrow$ zwei Gleichungen. Skizze.



▶ **Fragen, welche auf eine Gleichung führen:**
sich unterscheiden **um**" $\Rightarrow$ **Differenz (Minus)**

▶ **Gleichungen aufstellen:** $x - y = 7 \Rightarrow \boxed{x = 7 + y}$ $[I]$

Rechtwinkliges Δ $\Rightarrow$ Pythagoras (S. 112): $\boxed{x^2 + y^2 = 13^2}$ $[II]$

▶ **Gleichungen lösen:** Setze Gleichung $[I]$ in $[II]$ ein:

$$(7 + y)^2 + y^2 = 13^2 \quad | \; \text{binomische Formel}$$

$$49 + 14y + y^2 + y^2 = 169 \quad | \; -169$$

$$2y^2 + 14y - 120 = 0 \quad | \; :2$$

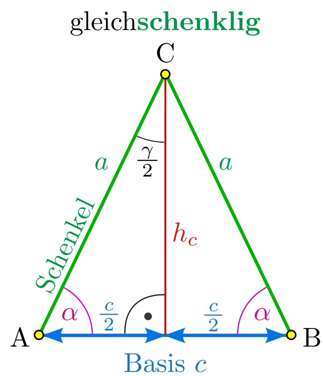
$$y^2 + 7y - 60 = 0 \quad \Big| \; \text{Zweiklammeransatz, denke an: } 60 = 5 \cdot 12 \text{ und } 12 - 5 = 7$$

$$(y + 12) \cdot (y - 5) = 0 \quad | \; \text{ablesen: } \begin{cases} y_1 = -12 & \text{(nicht sinnvoll)} \\ \boxed{y_2 = 5} \end{cases}$$

5.9 Gleichschenkliges Dreieck

Ein Dreieck, welches **zwei gleichlange Seiten** hat, heisst **gleichschenklig**. Dann gilt:

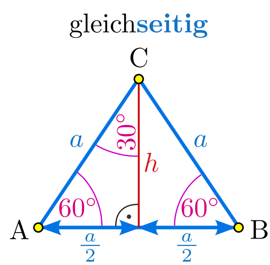
- Die Höhe h_c halbiert die Basis und den Winkel γ.
- die Basiswinkel α sind gleich gross.



5.10 Gleichseitiges Dreieck

Im gleich**seitigen** Dreieck sind **alle drei Seiten gleich lang**. Zusätzlich zu den Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks, gilt:

- Alle Winkel sind gleich gross: $\alpha = 60°$.
- **Höhenformel:** $\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}$
- **Flächenformel:** $\boxed{A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2}$



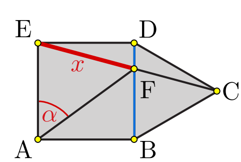
Beweis: Satz von Pythagoras im linken Teildreieck:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \qquad \Big| -\frac{a^2}{4} \quad \text{dann } \sqrt{\ }$$

$$h = (\pm)\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \qquad \text{| damit folgt für die Fläche}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \quad \text{QED.}$$

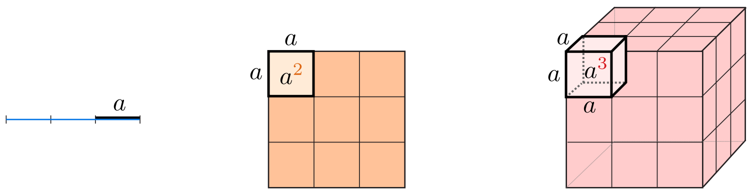
Beispiel 8*: Die rechts dargestellte Figur besteht aus einem Quadrat und einem gleichseitigen Dreieck, welche die gemeinsame gegebene Seite $a = \overline{BD}$ haben. Berechne die Strecke $x = \overline{EF}$ sowie den Winkel α als Funktion von a.



6 Stereometrie (dreidimensionale Geometrie)

Mit Stereometrie wird die Geometrie des dreidimensionalen Raumes bezeichnet. Ein räumlich vollständig begrenztes Gebiet heisst Körper. Die Summe der Flächeninhalte aller Begrenzungsflächen heisst Oberfläche des Körpers; der von ihr umschlossene Teil des Raumes heisst Rauminhalt oder Volumen des Körpers. Längen sind eindimensional, während Flächen zweidimensional und Volumina dreidimensional sind. Flächen verhalten sich wie die Quadrate der Längen, Volumina wie deren Kuben (dritte Potenzen). Auf diese Weise lässt sich unmittelbar erkennen, dass $2\pi \cdot r^1$ eine Länge ist (Kreisumfang), während es sich bei πr^2 um eine Fläche (Kreisfläche) und bei $\frac{4}{3}\pi r^3$ um ein Volumen (Kugelvolumen) handelt.

Länge: 1 dim. *Länge* | **Fläche:** 2 dim. *Länge × Breite* | **Volumen:** 3 dimensional *Länge × Breite × Höhe*



$l = 3a^1$ $\qquad$ $A = (3a)^2 = 9a^2$ $\qquad$ $A = (3a)^3 = 27a^3$

Einheiten								Faktor
Längen	mm	cm	dm	m	Dm	hm	km	$10^1 = 10$
Flächen	mm^2	cm^2	dm^2	m^2	Dm^2	hm^2	km^2	$10^2 = 100$
Volumen	mm^3	cm^3	dm^3	m^3	Dm^3	hm^3	km^3	$10^3 = 1000$

Beispiel 1*: Rechne um: **a)** $A = 7\,\text{dm}^2$ in mm^2. **b)** $V = 11\,\text{dm}^3$ in km^3.

a)

$$1\,\text{dm} = 100\,\text{mm}$$
$$(1\,\text{dm})^2 = (100\,\text{mm})^2$$
$$1\,\text{dm}^2 = 10000\,\text{mm}^2$$
$$1\,\text{dm}^2 = 10^4\,\text{mm}^2 \quad \text{Damit:}$$
$$\Rightarrow \quad A = 7\,\text{dm}^2 = 7 \cdot 10^4\,\text{mm}^2$$

b)

$$1\,\text{km} = 10000\,\text{dm} = 10^4\,\text{dm}$$
$$1\,\text{dm} = 0.0001\,\text{km} = 10^{-4}\,\text{km}$$
$$(1\,\text{dm})^3 = (10^{-4}\,\text{km})^3$$
$$1\,\text{dm}^3 = 10^{-12}\,\text{km}^3 \quad \text{Damit:}$$
$$\Rightarrow \quad V = 11\,\text{dm}^3 = 11 \cdot 10^{-12}\,\text{km}^3$$

Volumina können in **Hohlmassen** angegeben werden: **Liter:** 1 l = 1 dm^3 = 1000 cm^3, **Deziliter:** 1 dl = 100 cm^3; **Milliliter:** 1 ml = 1 cm^3.

8.2.3 Parabeln, Quadratische Funktionen

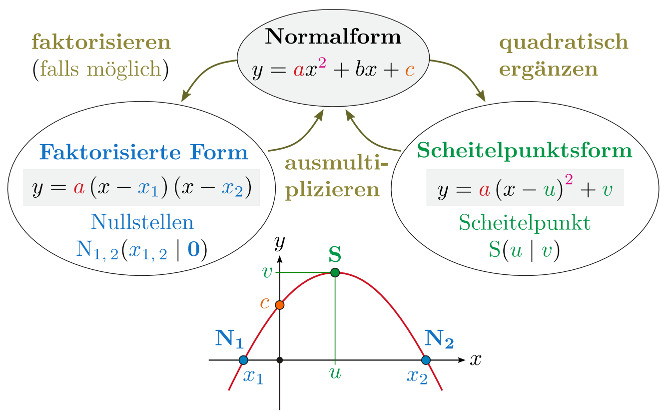
Eine **quadratische Funktion** ist eine Funktion, bei welcher x höchstens in der *zweiten Potenz*, also als x^2 erscheint: $\boxed{y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$ wobei

- a **Öffnung** $\begin{cases} a > 0 & \text{nach oben geöffnet } (\cup) \\ a = 1 & \text{Normalparabel} \\ a < 0 & \text{nach unten geöffnet } (\cap) \end{cases}$
- $b\,x$: linearer Term
- c : y – Achsenabschnitt

Der Ausdruck $y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ lässt sich entweder faktorisieren oder quadratisch ergänzen, wie die Übersicht zeigt.

Die Öffnung a hat in allen drei Formen die gleiche Bedeutung.

Die folgenden Beispiele sollen zeigen, welche Form der Parabelgleichung für welche Berechnung jeweils die geeignetste ist.



Beispiel 23*: Wie lautet die Gleichung einer Parabel, welche die x-Achse bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$ und die y-Achse bei $y = 3$ schneidet?

- **Beide Nullstellen** bekannt $\Rightarrow$ Nutze die **faktorisierte Form:**

  $y = a \cdot (x - (-2)) \cdot (x - 5) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)$

- Berechne a durch Einsetzen von Punkt $P(0 \mid 3)$:

$$3 = a \cdot (0 + 2) \cdot (0 - 5) \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{3}{10}$$

Damit ist:

9 Folgen und Reihen

Definition: Eine **Zahlenfolge** ist eine **Funktion** $a: \ \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto a_n$, d.h. **jeder** natürlichen Zahl n wird **genau eine** reelle Zahl a_n zugeordnet (siehe S. 162).

Zahlenfolgen lassen sich auf unterschiedliche Weise darstellen:

- **Explizit:** $a_n = \{\text{Formel mit } n\}$ [und zwar ausschliesslich mit n].

  Bsp: $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}, \quad a_2 = \dfrac{2}{2^2+1} = \dfrac{2}{5}, \ldots$

- **Rekursiv:** Vorschrift, wie das Folgenglied a_{n+1} aus dessen Vorgänger(n) a_n berechnet wird.

  Bsp: Gegeben sei $a_1 = 0$ sowie $a_{n+1} = \dfrac{2 \cdot a_n + 1}{3}$. Damit ist:

  $$a_2 = \frac{2 \cdot a_1 + 1}{3} = \frac{1}{3}, \qquad a_3 = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} + 1}{3} = \frac{5}{9}, \qquad a_4 = \frac{2 \cdot \frac{5}{9} + 1}{3} = \frac{19}{27}, \ldots$$

Beispiel 1*: Wie lautet das allgemeine Glied a_n?

a) $3, \ 8, \ 13, \ 18, \ 23, \ldots$

b) $5, \ -4, \ \dfrac{16}{5}, \ -\dfrac{64}{25}, \ \dfrac{256}{125}, \ldots$

c) $0, \ 3, \ 8, \ 15, \ 24, \ 35, \ 63, \ 80, \ldots$

d) $12, \ 36, \ 80, \ 150, \ 252, \ 392, \ldots$

---

a) Erkenne, dass die Glieder jeweils um $+5$ grösser werden: $a_{n+1} = a_n + 5$. Die Folge kann als „verschobene Fünferreihe" $5 \cdot n = 5, \ 10, \ 15, \ 20, \ 25, \ldots$ gesehen werden: Jedes der Folgenglieder ist um zwei kleiner als $5 \cdot n$, also $\boxed{a_n = 5 \cdot n - 2}$ Prüfe nach!

b) Erkenne, dass jeweils $a_{n+1} = a_n \cdot \left(-\dfrac{4}{5}\right)$ gilt:

$$a_2 = 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -4, \qquad a_3 = 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^2,$$

Allgemeines Glied: $\boxed{a_n = 5 \cdot \left(-\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}}$

11 Vollständige Induktion

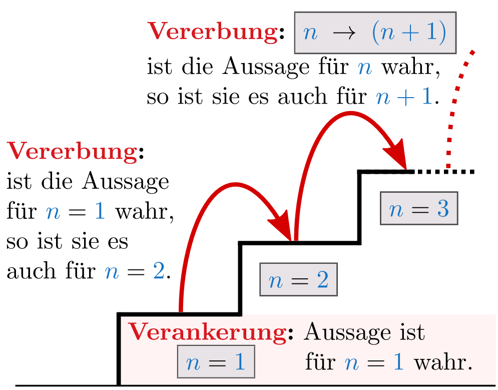
Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, mit welchem sich die Gültigkeit von Aussagen $\mathbb{A}_n$ für alle natürlichen Zahlen beweisen lassen. Beispielsweise lässt sich mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit einer vermuteten expliziten Darstellung einer Zahlenfolge oder Reihe beweisen. Idee ist ein ,,mathematisches Treppenlaufen", bestehend aus drei logisch zusammenhängenden Schritten:

I **Verankerung:** Überprüfe die (zu beweisende) Aussage $\mathbb{A}_n$ für $\boxed{n = 1}$

II **Induktionsannahme:** $\mathbb{A}_n$ sei für **ein** bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ wahr. Dann:

III **Vererbung (Induktionsschritt):** Zeige unter Verwendung der Annahme, dass die Aussage auch für $(n+1)$ zutrifft: Schritt von $\boxed{n \;\to\; (n+1)}$

Die Induktionsannahme, auch Voraussetzung genannt, erfordert keine Rechnung und wird zuweilen weggelassen. Nach der Verankerung ist die Induktionsannahme für $n = 1$ eine *Tatsache*, mit der Vererbung folgt, dass die Aussage auch für $n + 1 = 2$ zutrifft... Wird der Induktionsschritt in Gedanken beliebig oft durchlaufen, so folgt, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, wie die Skizze rechts zeigt.



Beispiel 1*: Gegeben sei eine Folge durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1$. Beweise, dass die explizite Darstellung dieser Folge durch $\boxed{a_n{}^{\mathbb{A}} = 2^n - 1}$ [= Aussage $\mathbb{A}$] gegeben ist.

I **Verankerung:** $\boxed{n = 1}$ $\quad\Rightarrow\quad a_1{}^{\mathbb{A}} = 2^1 - 1 = 1 = a_1 \quad \checkmark$

II **Induktionsannahme:** Für **ein** $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n = 2^n - 1$.

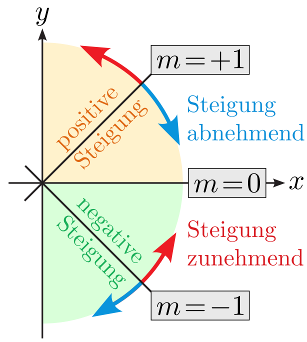
III **Vererbung (Induktionsschritt):** $\boxed{n \;\to\; (n+1)}$

- Zu Zeigen: $a_{n+1}^{\mathbb{A}} = 2^{(n+1)} - 1$ [Ersetze n durch $(n+1)$ in $\mathbb{A}$]
- Berechne a_{n+1} **rekursiv** unter Verwendung von $a_n = 2^n - 1$ aus der Induktionsannahme:

12 Differentialrechnung

12.1 Differenzenquotient und Differentialquotient

Das Kapitel Differentialrechnung befasst sich mit der Berechnung der **Änderungsrate**, also der **Steigung** einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer beliebigen Stelle x.



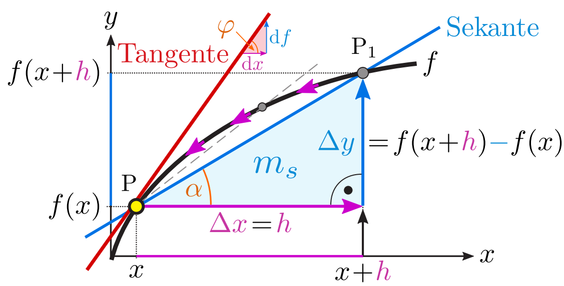
Der Begriff der Steigung (siehe S. 186) ist Voraussetzung für das Verständnis dieses Kapitels. Eine Steigung kann entweder *negativ* oder *positiv* sein und dabei *zunehmen* oder auch *abnehmen*, siehe Graphik.

In einem beliebigen Kurvenpunkt $\mathrm{P}(x \mid f(x))$ auf dem Graphen von f legen wir eine Tangente t. Weil t den Graphen von f *berührt*, haben t und f im Punkt P die *gleiche Steigung*. Wir stehen vor dem Problem, die Steigung m_t der Geraden t durch einen einzigen Punkt berechnen zu wollen. Die Begründer der Differentialrechnung -Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz- haben mit ihren Überlegungen das scheinbar unmögliche möglich gemacht:

I. Wähle einen **zweiten**, beliebigen **Hilfspunkt**

$\mathrm{P}_1(\ x + h \ \mid \ f(x + h)\ )$

auf dem Graphen von f. Dabei ist $\Delta x = h \neq 0$. Nun lässt sich die **Steigung m_s der Sekante** (Gerade durch P und P_1) berechnen:



$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dieser Ausdruck heisst **Differenzenquotient** und misst die **mittlere Steigung** von f zwischen P und P_1, also zwischen x und $x_1 = x + h$.

II. Von der Sekante zur Tangente: Da der Hilfspunkt P_1 von wenig Interesse ist, verschieben wir P_1 entlang dem Graphen von f in Richtung von P. Je näher P_1 auf P zukommt, desto mehr wird die Sekante zur Tangente. Die Tangente ist somit der **Grenzwert** (siehe S. 268) der Sekante, wenn $\mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}$ läuft. Weil $y_1 = f(x + h)$ sicherstellt, dass P_1 stets auf f bleibt, reicht es $x_1 \to x$

bzw. $h \to 0$ (und gleichzeitig $h \neq 0$) zu verlangen. Dieser Grenzwert heisst **Differentialquotient** und berechnet die **Tangentensteigung** m_t von f an der Stelle x:

$$\boxed{m_t = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x)} \qquad [\bigstar]$$

Der Differentialquotient[1] beschreibt die lokale Änderungsrate, also die Steigung der Funktion f an der Stelle x und bildet die Definition der **ersten Ableitung** $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ von f an der Stelle x.

Definition: Eine Funktion $x \mapsto y = f(x)$ heisst **differenzierbar** (**„knickfrei"**) an der Stelle x wenn der Grenzwert [★] existiert, also **eindeutig** und **endlich** ist. Dann heisst $m_t = f'(x)$ die **erste Ableitung** von f an der Stelle x.
Mit **eindeutig** ist gemeint, dass $f'(x)$ **unabhängig** von der anfänglichen Wahl des Hilfspunktes P_1 ist: Es darf keine Rolle spielen, ob P_1 anfänglich links ($h < 0$) oder rechts ($h > 0$) von P gewählt wurde.

Beispiel 1*: Berechne die erste Ableitung der Funktion $f(x) = 3\,x^2 - 6\,x$ mittels Differentialquotient. Welche Steigung hat f an den Stellen $x = 0$, 1 und 2.

Berechne $f'(x)$ für allgemeines x und setze anschliessend die entsprechenden x-Werte in $f'(x)$ ein:

- **Funktion in den Differentialquotienten [★] auf S. 297 einsetzen:**

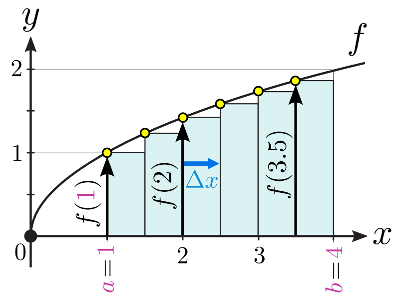
$$f'(x) \overset{\text{Def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{3\cdot(x+h)^2 - 6\cdot(x+h)}^{f(x+h)} - \overbrace{(3\cdot x^2 - 6\cdot x)}^{f(x)}}{h} \quad \Big|\ \text{binomische Formeln}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3\cdot(x^2 + 2\,x\,h + h^2) - 6\,x - 6\,h \; - \; 3\,x^2 + 6\,x}{h} \quad \Big|\ \text{ausmultiplizieren}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3\,x^2 + 6\,x\,h + 3\,h^2 - 6\,x - 6h - 3\,x^2 + 6\,x}{h} \quad \Big|\ \text{vereinfachen}$$

[1] Differentialquotient: Quotient (also Bruch) aus Differentialen, also aus beliebig kleinen Differenzen „$\frac{\text{fast 0}}{\text{fast 0}}$".

Beispiel 1*: Berechne die 6. Untersumme U_6 für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[1,\ 4]$:



- Skizziere f. Erkenne, dass f monoton wachsend ist.
- **Breite** der Rechtecke:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2}$$

- **Untersumme:**

$$U_6 = \sum_{k=1}^{6} \sqrt{1 + (k-1) \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{ausgeschrieben}$$

$$U_6 = \sqrt{1 + 0 \cdot \tfrac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2} + \sqrt{1 + 1 \cdot \tfrac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2} + \sqrt{1 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2} + {}$$
$$+ \sqrt{1 + 3 \cdot \tfrac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2} + \sqrt{1 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2} + \sqrt{1 + 5 \cdot \tfrac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$U_6 = \left(\sqrt{1} + \sqrt{1.5} + \sqrt{2.0} + \sqrt{2.5} + \sqrt{3.0} + \ldots + \sqrt{3.5}\right) \cdot \frac{1}{2} \approx 4.41$$

Übung: Berechne die 6. Obersumme O_6 der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[1,\ 4]$. Wie könnte aus U_6 und O_6 ein möglichst genauer Schätzwert für die krummlinig begrenzte Fläche unter f im $[1,\ 4]$ berechnet werden? Zum Vergleich: Die krummlinige Fläche unter f hat den Inhalt $A = 4.67$.

Der Inhalt der unter f im Intervall $[a,\ b]$ begrenzten krummlinigen Fläche A liegt irgendwo zwischen dem Wert der Ober- und der Untersumme:

$$\boxed{U_n < A < O_n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Je grösser die Anzahl der Rechtecke wird ($n \to \infty$) und je schmaler diese gleichzeitig werden ($\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$), umso mehr streben U_n und O_n aufeinander zu.

Daher kann die krummlinig von f berandete Fläche A als Grenzwert

$$A = \lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} O_n$$

berechnet werden, siehe Graphik auf S. 371. Das bringt uns zu folgender Definition.

Definition: Es sei $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,\ b]$. Dann berechnet das **bestimmte Integral** den Inhalt der Fläche A unter dem Graphen der Funktion f im Intervall $[a,\ b]$ als Grenzwert einer Unter- oder Obersumme für $n \to \infty$:

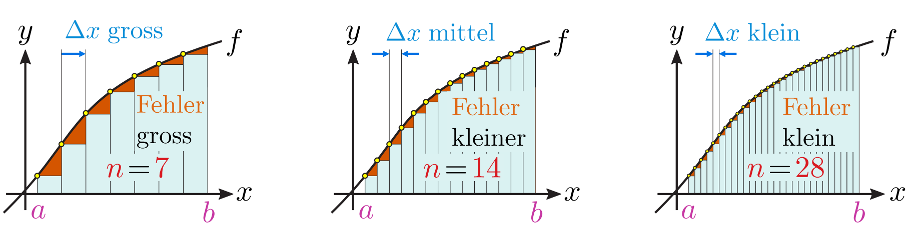
$$A = \int_{x=a}^{x=b} f(x) \cdot \mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{:=} \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{f(\,a + (k-1)\Delta x\,)}_{\text{Höhe} = f(x_k)} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{Breite}} \\ \lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{f(\,a + k\Delta x\,)}_{\text{Höhe} = f(x_k)} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{Breite}} \end{cases}$$

Das bestimmte Integral einer Funktion f existiert nur dann, wenn die Grenzwerte von Ober- bzw. Untersumme *eindeutig* und *endlich* sind.

Bezeichnungen:

- a und b heissen **Integrationsgrenzen**.
- $f(x)$ heisst **Integrand** und steht für die Länge der Rechtecke.
- Das **Symbol** $\mathrm{d}x$ steht für die **differentielle Breite** der unendlich vielen, aber unendlich schmalen Rechtecke, deren Fläche summiert (=integriert) werden. Demgegenüber steht Δx für die **endliche Breite** (einer endlichen Summe). Der Ausdruck $\mathrm{d}x$ kennzeichnet die **Integrationsvariable**, d.h. die Variable x über die integriert werden soll.
- Die Unter- und Obersummen heissen auch **Riemannsche Summen**. Das Integralzeichen $\int$ symbolisiert ein stilisiertes „s" wie Summe (der Schrift von Leibniz zu verdanken).

Die Graphik veranschaulicht das Konvergenzverhalten einer Untersumme U_n gegen die Fläche unter dem Graphen von f für $n \to \infty$. Analoges gilt für die Obersummen.



14 Vektorgeometrie

Physikalische Grössen, welche eine **Richtung** haben (gerichtete Grössen), werden durch **Vektoren** beschrieben. In Koordinatensystemem bestehen Vektoren aus mehreren Komponenten.

Beispiele: Ort $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}, \ldots$

Die Anzahl der Komponenten gibt dabei die **Dimension** des Vektors an. Im Beispiel sind $\vec{r}$ und $\vec{v}$ Vektoren im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, während $\vec{F}$ ein Vektor in der zweidimensionalen xy-Ebene $\mathbb{R}^2$ darstellt. Hingegen haben weder Temperatur T noch Energie E eine Richtung, im Gegensatz zu Vektoren werden diese als „skalare" Grössen bezeichnet (Skalar = Zahl).

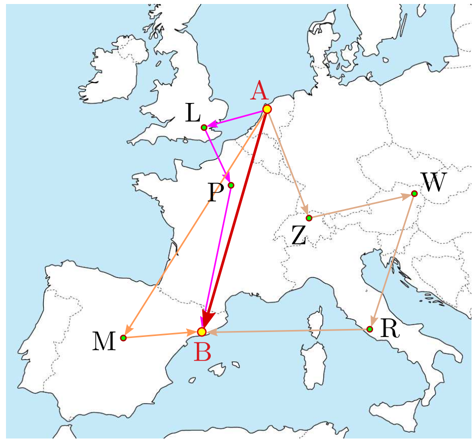
Der Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ beschreibt eine **Verschiebung (Translation)** von Punkt A nach Punkt B. Vektoren haben folgende Eigenschaften:

- eine **Richtung**,
- eine **Orientierung**,
- eine **Länge (Betrag)** $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$.

Vektoren haben jedoch **keinen fixen Anfangspunkt**, von welchem aus eine Verschiebung ausgehen soll: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ beschreibt zwar eine Verschiebung von A nach B, kann aber beliebig parallel verschoben werden.

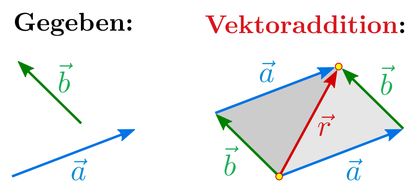
Merke: Vektoren dürfen beliebig parallel verschoben werden und an jeden beliebigen Punkt „angeheftet" werden (siehe Skizze).

Lambert möchte von Amsterdam (A) nach Barcelona (B) fliegen. Dabei spielt es -abgesehen von Umweltaspekten und Reisezeit- wenig Rolle, über welche Zwischenstationen er fliegt. Konkret:



- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ oder
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PB}$ oder
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZW} + \overrightarrow{WR} + \overrightarrow{RB}$

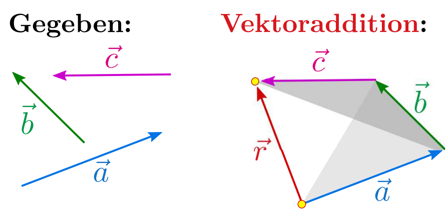
Dies zeigt den Charakter der Vektoren als Verschiebung - dazu die Addition von Vektoren.
Vektoren werden miteinander addiert, indem diese so parallel verschoben werden, dass ihre **Pfeile aneinandergehängt** werden. Auf diese Weise entsteht das Parallelogramm der Vektoraddition. Der **resultierende Vektor** $\vec{r}$, also die Summe der addierten Vektoren verbindet den Anfangspunkt mit dem Endpunkt. Dabei gilt das **Kommutativgesetz**:



Summenvektor : $\boxed{\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$

Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge Vektoren miteinander addiert werden.

Ebenso erfüllt die Vektoraddition das **Assoziativgesetz**: Es ist egal, ob zuerst $\vec{a}$ mit $\vec{b}$ addiert werden und dem Ergebnis anschliessend $\vec{c}$ addiert wird, oder ob zuerst $\vec{b}$ und $\vec{c}$ addiert werden, und anschliessend $\vec{a}$ dazuaddiert wird:



$$\boxed{\vec{r} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$$

20 Wahrscheinlichkeit

20.1 Bezeichnungen und Definitionen

- **Zufallsversuch:** Versuch mit mehreren, nicht vorhersagbaren, also vom Zufall abhängigen Ergebnissen: Beispielsweise der Wurf eines Würfels oder einer Münze.

- **Stichprobenraum S:** Menge aller möglichen Ergebnisse.

  Beispielsweise $\mathbf{S} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ beim Wurf eines Würfel.

- **Ereignisse A, B,...: Teilmengen** des Stichprobenraums **S**. Wir symbolisieren **S** durch ein Rechteck, in welchem die Teilmengen **A**, **B**,... eingezeichnet werden.

  Beispiel: $\mathbf{A} = \{\text{Augenzahl des Würfels ist Primzahl}\} = \{2,\ 3,\ 5\}$.

  Elementarereignisse sind Ereignisse, welche aus genau einem Element aus **S** bestehen. Beispiel: $\mathbf{B} = \{\text{Würfel zeigt Augenzahl } 2\}$.

- **Zufallsvariable:** Variable X, welche bestimmte Werte $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = x_i), \quad i \in \{1,\ 2, \ldots, n\}$ annehmen kann (diskrete Zufallsvariable).

  Beispiel: $X = \{2 \cdot \text{Augenzahl} + 1\} = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13\}$. Im Fall eines homogenen Würfels (Laplace-Würfels) ist $p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{6}$ für alle $i \in \{1,\ 2, \ldots, 6\}$ gleich gross.

- **Laplace-Experiment:** Experiment, bei welchem jedes Elementarereignis **gleichwahrscheinlich** ist. Nur dann lässt sich die **Wahrscheinlichkeit** $P(\mathrm{A})$ eines Ereignisses A durch *abzählen* der günstigen und der möglichen Fälle berechnen:

  $$\boxed{P = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{g}{m} = \frac{\text{Anzahl Elemente in A}}{\text{Anzahl Elemente in S}}}$$

  Daraus folgt unmittelbar, dass **jede Wahrscheinlichkeit immer zwischen Null und Eins liegen muss.**

Folgendes Beispiel führt grundlegende Begriffe und Symbole der Mengenlehre ein:

Beispiel 1*: Aus einer Urne mit 10 identischen durchnummerierten Kugeln von 0 bis 9 wird zufällig eine gezogen. Betrachte A = {Zahl ist gerade} und B = {Zahl ist Primzahl}. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die gezogene Zahl...

a) (i) gerade? (ii) Primzahl?

b) (i) kleiner als 10? (ii) grösser als 10?

c) eine gerade Primzahl?

d) gerade oder eine Primzahl?

e) keine Primzahl?

f) gerade, aber nicht Primzahl?

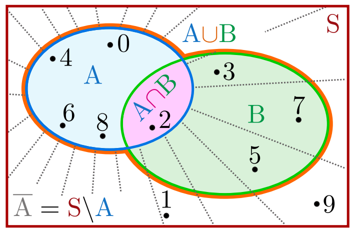
g) weder gerade noch Primzahl?

Stichprobenraum:

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

S hat $n = 10$ Elemente.

Mengendiagramm:



---

a) (i) $A = \{\text{Zahl ist Gerade}\} = \{0, 2, 4, 6, 8\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

(ii) $B = \{\text{Primzahl}\} = \{2, 3, 5, 7\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

b) Die Zufallsvariable X bezeichne die gezogene Zahl.

(i) $P(X < 10) = \frac{10}{10} = 1$

Sicheres Ereignis: Alle Zahlen sind kleiner als 10.

(ii) $P(X > 10) = \frac{0}{10} = 0$

Unmögliches Ereignis: Keine Zahl ist grösser als 10.

c) Gerade Primzahl bedeutet Gerade **und** Primzahl: **Schnittmenge:**

$A \cap B = \{2\} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

die Zahl 2 ist die einzige gerade Primzahl, siehe S. 614.

d) Gerade **oder** Primzahl: **Vereinigungsmenge:**

$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

e) **Nicht** Primzahl bedeutet: Alles ausser Primzahl.

Logisches Gegenteil, Komplement:

$P(\overline{B}) = \frac{10-4}{10} = \frac{10}{10} - \frac{4}{10} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$