

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Zahlenmengen</b>	<b>4</b>
2.1	Teilbarkeitsregeln ■ . . . . .	9
2.2	Besondere Zahlen: Quadratzahlen, Potenzen ■ . . . . .	9
2.3	Komplexe Zahlen ♦ . . . . .	12
2.3.1	Einleitung ♦ . . . . .	12
2.3.2	Kartesische und polare Darstellung komplexer Zahlen ♦ . . . .	13
2.3.3	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen ♦ . . . . .	18
2.3.4	Multiplikation komplexer Zahlen ♦ . . . . .	19
2.3.5	Division komplexer Zahlen ♦ . . . . .	20
2.3.6	Potenzieren bei komplexen Zahlen ♦ . . . . .	22
2.3.7	Radizieren komplexer Zahlen ♦ . . . . .	23
2.3.8	Komplexe Gleichungen, Fundamentalsatz der Algebra ♦ . . . .	25
<b>3</b>	<b>Algebra</b>	<b>29</b>
3.1	Axiome der reellen Zahlen ■ . . . . .	29
3.2	Klammerregeln, Reihenfolge, Vorzeichenregeln ■ . . . . .	29
3.3	Ausmultiplizieren und Faktorisieren von Ausdrücken ■ . . . . .	31
3.4	Binomischer Satz und Pascalsches Zahlendreieck ■ . . . . .	37
3.5	Bruchrechnen ■ . . . . .	39
3.5.1	Multiplikation von Brüchen . . . . .	40
3.5.2	Division von Brüchen, Doppelbrüche . . . . .	40
3.5.3	Addition, Subtraktion von Brüchen . . . . .	42
3.6	Potenzrechnen ■ . . . . .	44
3.6.1	Erster Potenzsatz: Gleiche Basis ■ . . . . .	44
3.6.2	Zweiter Potenzsatz: Gleiche Exponenten ■ . . . . .	45
3.6.3	Dritter Potenzsatz: Doppelte Potenzen ■ . . . . .	46
3.6.4	Negative Exponenten: Nenner ■ . . . . .	47
3.6.5	Gebrochene Exponenten: Wurzeln ■ . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Gleichungen</b>	<b>50</b>
4.1	Äquivalenzumformungen ■ . . . . .	50
4.2	Lineare Gleichungen ■ . . . . .	52
4.3	Quadratische Gleichungen ■ . . . . .	53
4.4	Substitution (Ersetzung) ■ . . . . .	60
4.5	Fundamentalsatz der Algebra, Polynomgleichungen ■ . . . . .	63
4.6	Wurzelgleichungen ■ . . . . .	66
4.7	Potenz- und Wurzelgleichungen ■ . . . . .	70

4.8	Exponential- und Logarithmusgleichungen ■ . . . . .	71
4.9	Trigonometrische Gleichungen ■ . . . . .	77
4.10	Newtonscher Nullstellen Algorithmus ♦ . . . . .	81
4.11	Lineare Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten ■ . . . . .	83
4.11.1	Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten ■ . . . . .	83
4.11.2	Lineare Gleichungssysteme mit drei (oder mehreren) Gleichungen ■ . . . . .	84
4.11.3	Lineare Gleichungssysteme mit Matrizen, Gauss-Algorithmus ■ . . . . .	85
4.11.4	Nichtlineare Gleichungssysteme ■ . . . . .	89
4.12	Textaufgaben ■ . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Planimetrie (zweidimensionale Geometrie)</b>	<b>99</b>
5.1	Allgemeines zu Dreiecken ■ . . . . .	99
5.2	Kongruenz bei Dreiecken, Kongruenzsätze ■ . . . . .	99
5.2.1	Seite-Seite-Seite (SSS): ■ . . . . .	100
5.2.2	Seite-Winkel-Seite (SWS): ■ . . . . .	100
5.2.3	Winkel-Seite-Seite (WSW): ■ . . . . .	100
5.2.4	Seite-Winkel-Winkel (SWW): ■ . . . . .	101
5.2.5	Seite-Seite-Winkel (SSWg): ■ . . . . .	101
5.3	Ähnliche Dreiecke, Strahlensätze, Proportionalität ■ . . . . .	102
5.4	Kreiswinkelsätze ■ . . . . .	104
5.4.1	Sehnentangentenwinkel: ■ . . . . .	104
5.4.2	Satz von Thales ■ . . . . .	105
5.5	Linien im Dreieck ■ . . . . .	108
5.6	Flächeninhalt eines Dreiecks ■ . . . . .	110
5.7	Rechtwinklige Dreiecke: Satzgruppe von Pythagoras ■ . . . . .	112
5.8	Rechtwinklige Dreiecke: Trigonometrische Funktionen ■ . . . . .	116
5.9	Gleichschenkliges Dreieck ■ . . . . .	119
5.10	Gleichseitiges Dreieck ■ . . . . .	119
5.11	Allgemeine Dreiecke: Sinussatz ■ . . . . .	120
5.12	Allgemeine Dreiecke: Cosinussatz ■ . . . . .	123
5.13	Geometrie am Viereck ■ . . . . .	128
5.14	Kreis, Umfang, Fläche, regelmässige $n$ -Ecke, Kreiszahl $\pi$ ■ . . . . .	131
5.14.1	Berechnung der Kreiszahl $\pi$ ♦ . . . . .	132
5.14.2	Herleitung der Kreisfläche ♦ . . . . .	133
5.15	Kreis Sektor und Bogenlänge ■ . . . . .	134
5.16	Kreissegment ■ . . . . .	136

<b>6</b>	<b>Stereometrie (dreidimensionale Geometrie)</b>	<b>138</b>
6.1	Das Prinzip von Cavalieri ■ . . . . .	139
6.2	Prismen ■ . . . . .	139
6.3	Pyramiden (Spitze Körper) ■ . . . . .	141
6.4	Kreiszyylinder (Zylinder) ■ . . . . .	148
6.5	Kreiskegel (Kegel) ■ . . . . .	151
6.6	Kugel und Kugelteile ■ . . . . .	153
6.6.1	Kugelteile ■ . . . . .	155
6.7	Polyeder ♦ . . . . .	158
6.8	Platonische Körper ♦ . . . . .	159
<b>7</b>	<b>Funktionen - allgemeine Eigenschaften</b>	<b>161</b>
7.1	Definitions- und Wertebereich ■ . . . . .	162
7.2	Monotonie ■ . . . . .	164
7.3	Umkehrfunktion ■ . . . . .	166
7.4	Stetigkeit ■ . . . . .	170
7.5	Symmetrie ■ . . . . .	173
7.6	Verschiebung von Funktionen ♦ . . . . .	176
7.7	Spiegelung von Funktionen an den Koordinatenachsen ♦ . . . . .	178
7.8	Streckung, Stauchung von Funktionen ♦ . . . . .	179
<b>8</b>	<b>Eigenschaften spezieller Funktionen ■</b>	<b>182</b>
8.1	Potenzfunktionen ■ . . . . .	182
8.1.1	Wurzelfunktionen ■ . . . . .	184
8.2	Ganzrationale Funktionen, Polynomfunktionen ■ . . . . .	185
8.2.1	Geraden, lineare Funktionen [siehe auch S.451] ■ . . . . .	186
8.2.2	Lineare Optimierung ♦ . . . . .	193
8.2.3	Parabeln, Quadratische Funktionen ■ . . . . .	196
8.2.4	Polynomfunktionen 3. Grades, Wendeparabeln ■ . . . . .	205
8.3	Mehrfache Nullstellen ■ . . . . .	206
8.4	Gebrochenrationale Funktionen ■ . . . . .	207
8.5	Exponentialfunktionen ■ . . . . .	214
8.6	Logarithmusfunktionen ■ . . . . .	218
8.7	Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) ■ . . . . .	226
8.7.1	Winkelmessung: Gradmass und Bogenmass ■ . . . . .	227
8.7.2	Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis ■ . . . . .	228
8.7.3	Skizzieren der Graphen trigonometrischer Funktionen ■ . . . . .	232
8.7.4	Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen ♦ . . . . .	236
8.8	Betragsfunktion ♦ . . . . .	238

<b>9 Folgen und Reihen</b>	<b>241</b>
9.1 Arithmetische Folgen (AF) ■	242
9.2 Geometrische Folgen (GF) ■	243
9.3 Reihen ■	249
9.3.1 Arithmetische Reihen (AR) ■	250
9.3.2 Geometrische Reihen (GR) ■	254
9.3.3 Unendliche geometrische Reihen ( $\infty$ GR) ■	258
9.3.4 Geometrische Bedeutung des Quotienten: Längen, Flächen und Volumina ■	260
9.4 Zusammenfassende Übersicht ■	266
<b>10 Grenzwerte, Limes, Limits</b>	<b>268</b>
10.1 Definition und Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bzw. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ■	268
10.2 Dominanzregel ■	273
10.3 Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , Grenzwertsätze und $h$ -Methode ■	275
10.3.1 Die $h$ -Methode ■	276
10.4 Regel von Hospital (eigentlich Bernoulli) ♦	282
<b>11 Vollständige Induktion</b> ♦	<b>286</b>
<b>12 Differentialrechnung</b>	<b>296</b>
12.1 Differenzenquotient und Differentialquotient ■	296
12.2 Berechnung von Ableitungen: Ableitungsregeln Teil I ■	303
12.2.1 Potenzfunktionen ■	304
12.2.2 Additive Konstante ■	305
12.2.3 Multiplikative Konstante (konstanter Faktor) ■	306
12.2.4 Summenregel ■	306
12.3 2. Ableitung - Bedeutung und Berechnung ■	308
12.4 Kurvendiskussion: Skizzieren von Funktionsgraphen ■	314
12.5 Tangentengleichungen ■	317
12.6 Normalengleichungen, Kurvennormale ■	320
12.7 Schnittwinkel zweier Funktionen ■	322
12.8 Bestimmen von Funktionsgleichungen ■	325
12.9 Berechnung von Ableitungen: Ableitungsregeln Teil II ■	331
12.9.1 Ableitung der Exponentialfunktion ■	331
12.9.2 Ableitung der trigonometrischen Funktionen ■	333
12.9.3 Ableitung der Umkehrfunktion (Umkehrsatz) ♦	335
12.9.4 Produktregel ■	337
12.9.5 Quotientenregel ■	338
12.9.6 Kettenregel ■	344

12.10	Optimierung, Extremwertaufgaben ■ . . . . .	357
<b>13</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>368</b>
13.1	Flächenberechnungen: Bestimmte Integrale ■ . . . . .	368
13.2	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ■ . . . . .	374
13.3	Unbestimmte Integrale ■ . . . . .	377
13.4	Berechnung von Stammfunktionen (Teil 1) ■ . . . . .	377
13.4.1	Integration verketteter Funktionen, lineare Substitution ■ . . . . .	382
13.5	Integrationsregeln und Flächenberechnungen ■ . . . . .	383
13.5.1	Flächeninhalte zwischen zwei Funktionen ■ . . . . .	390
13.5.2	Uneigentliche Integrale ■ . . . . .	395
13.6	Rotationsvolumen: Drehung um die $x$ -Achse ■ . . . . .	399
13.7	Bogenlänge einer Kurve ♦ . . . . .	403
13.8	Berechnung von Stammfunktionen (Teil 2) ■ . . . . .	406
13.8.1	Partielle Integration ♦ . . . . .	406
13.8.2	Substitutionsregel ♦ . . . . .	410
13.8.3	Partialbruchzerlegung ♦ . . . . .	416
13.8.4	Arcustangens-Integrale ♦ . . . . .	420
13.9	Integration - Versuch einer Systematik ♦ . . . . .	423
<b>14</b>	<b>Vektorgeometrie</b>	<b>424</b>
14.1	Koordinatensysteme ■ . . . . .	427
14.2	Länge, Betrag eines Vektors ■ . . . . .	428
14.3	Addition von Vektoren ■ . . . . .	428
14.4	Subtraktion von Vektoren, Differenzvektor ■ . . . . .	429
14.5	Kollineare Vektoren, Einheitsvektoren ■ . . . . .	431
14.6	Linearkombinationen ■ . . . . .	432
14.6.1	Mittelpunktsatz ■ . . . . .	435
14.6.2	Schwerpunktsatz und Seitenhalbierende ■ . . . . .	436
14.7	Skalarprodukt (Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ) ■ . . . . .	440
14.8	Vektorprodukt, Kreuzprodukt ■ . . . . .	446
<b>15</b>	<b>Geradengleichungen</b>	<b>451</b>
15.1	Übersicht Geradengleichungen ■ . . . . .	451
15.2	Die Parameterform einer Geraden ■ . . . . .	452
15.3	Spurpunkte einer Geraden im Raum ■ . . . . .	457
15.4	Gegenseitige Lage zweier Geraden im Raum ■ . . . . .	458
15.5	Abstand Punkt zu Gerade im Raum ■ . . . . .	460
15.6	Abstand zweier windschiefen Geraden im Raum ♦ . . . . .	462
15.7	Koordinatenform einer Geraden in der Grundebene ■ . . . . .	466

<b>16 Ebenengleichungen</b>	<b>474</b>
16.1 Übersicht Ebenengleichungen ■ . . . . .	474
16.2 Parameterform, Umwandlung in Koordinatenform ■ . . . . .	475
16.3 Koordinatenform der Ebenengleichung ■ . . . . .	478
16.4 Achsenabschnittsform einer Ebene, Spurgeraden ■ . . . . .	480
16.5 Normalenvektor, senkrechte Ergänzung ■ . . . . .	483
16.6 Abstand Punkt – Ebene ■ . . . . .	487
16.7 Schnittgerade Ebene - Ebene ■ . . . . .	490
16.8 Winkel Ebene - Ebene ■ . . . . .	491
16.9 Winkel Ebene - Gerade ■ . . . . .	492
16.10 Winkelhalbierende Ebenen ♦ . . . . .	493
<b>17 Kreis, Kreisgleichung ♦</b>	<b>498</b>
<b>18 Kugelgleichungen, Sphären ♦</b>	<b>505</b>
<b>19 Kombinatorik</b>	<b>515</b>
19.1 Permutationen (Anordnungen) ohne Wiederholung ■ . . . . .	516
19.2 Permutationen (Anordnungen) mit Wiederholung ■ . . . . .	518
19.3 Variationen ohne Wiederholung ■ . . . . .	520
19.4 Variationen mit Wiederholung ■ . . . . .	523
19.5 Kombinationen ohne Wiederholung ■ . . . . .	525
19.6 Kombinationen mit Wiederholung ■ . . . . .	529
19.7 Übersicht Kombinatorik ■ . . . . .	531
<b>20 Wahrscheinlichkeit</b>	<b>534</b>
20.1 Bezeichnungen und Definitionen ■ . . . . .	534
20.2 Wahrscheinlichkeit Definition, Axiome von Kolmogorow ■ . . . . .	536
20.3 Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung ■ . . . . .	536
20.3.1 Gegenwahrscheinlichkeit ■ . . . . .	536
20.3.2 Additionssatz ■ . . . . .	537
20.3.3 Multiplikationssatz, unabhängige Ereignisse ■ . . . . .	539
20.4 Ereignisbaum ■ . . . . .	540
20.5 Mengendiagramm (Venn-Diagramm) ■ . . . . .	543
20.6 Binomialverteilung, Bernoulli-Experiment ■ . . . . .	547
20.6.1 Die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung ■ . . . . .	552
20.7 Bedingte Wahrscheinlichkeit ♦ . . . . .	556
20.7.1 Unabhängige Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeit ♦ . . . . .	559
20.7.2 Satz von Bayes ♦ . . . . .	559
20.8 Geometrische Wahrscheinlichkeit ♦ . . . . .	562
20.9 Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Erwartungswert ♦ . . . . .	563

20.9.1	Rechenregeln Erwartungswert ♦	567
20.10	Streuemasse: Varianz und Standardabweichung ♦	570
20.10.1	Rechenregeln Varianz ♦	573
20.11	Kovarianz ♦	577
20.12	Korrelationskoeffizient ♦	580
20.13	Lineare Regression: Methode der kleinsten Quadrate ♦	582
20.14	Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen ♦	588
20.15	Normalverteilung (Gauss-Verteilung) ♦	596
20.16	Zusammenhang Binomial- und Normalverteilung ♦	601
<b>21</b>	<b>Anhang</b>	<b>611</b>
21.1	Binomialkoeffizienten und binomischer Satz ♦	611
21.1.1	Beweis des binomischen Satzes ♦	611
21.1.2	Beweis der Symmetrie von Binomialkoeffizienten ♦	613
21.1.3	Beweis der Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten ♦	613
21.2	Tabellen und mathematische Konstanten ♦	614
<b>22</b>	<b>Ideengenerator: An was denke ich, wenn...</b>	<b>617</b>
<b>23</b>	<b>Die 10 Sünden der Mathematik</b>	<b>635</b>
<b>24</b>	<b>Mathematische Symbole</b>	<b>636</b>